قرطاج
Carthage
للنشر والتوزيع

Collection«Pilote»

MATHEMATIQUES

Algèbre & Géométrie

Section

MATHEMATIQUES

Rappels de cours

Recueil d'exercices corrigés

Extraits de devoirs corrigés

4ème année

TOME 1

Elaboré par :

Lamloumi Maâmmar

Sommaire

Titre	Exercices	Solutions
continuité et limites	2	1
Suites réelles	11	13
Dérivabilité	25	32
Fonction Réciproque	36	45
Primitives	48	74
Intégrales	55	81
Nombres complexes	68	101
Isométries du plan	84	124
Déplacements et antidéplacements	94	133
Devoirs	109	156

RESUME DU COURS

Théorème 1 :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

-Si f est continue en a , alors les fonctions $\alpha f\ (f \in IR)$; $|f|$ et $f^n\ (n \in < IN^*)$ sont continues en a

-Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$; $(n \in IN^*)$ sont continues en a.

-Si f et g sont continues en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a.

- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Théorème 2 :Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I. S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$; alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$

Théorème 3 :Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I. Si la fonction f admet une limite finie α lorsque x tend vers a ; alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \alpha & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a.

Opérations sur les limites :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
L	L'	L + L'
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f \times g)$
L	L'	L × L'
$+\infty$	L' > 0	$+\infty$
$+\infty$	L' < 0	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
L	L' ≠ 0	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	L' > 0	$+\infty$

$+\infty$	$L' < 0$	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$L' \neq 0$	0	∞ (on applique la règle des signes)

$\lim f$	$\lim \lvert f \rvert$	$\lim \sqrt{\lvert f \rvert}$
L	$\lvert L \rvert$	$\sqrt{\lvert L \rvert}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 4 :
La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Branches infinies :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	La droite $D : x = a$ est une asymptote à C_f
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$	La droite $D : y = L$ est une asymptote à C_f
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$	La droite $D : y = ax + b$ est une asymptote à C_f

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ est l'infini, alors C_f admet une branche parabolique de direction $\left(O , \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $\left(O , \vec{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ \left(a \in IR^*\right)$, alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right]$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] = b \ \left(b \in IR\right)$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right]$ est l'infini alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Continuité et limite d'une fonction composée :

Définition :Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I) \subset J$.
La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v\left(u(x)\right)$, est appelée fonction composée de u et v

Théorème 4 :Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel α et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant un réel $u(\alpha)$ .Si u est continue en α et v est continue en $u(\alpha)$, alors $v \circ u$ est continue en α.

Corollaire : La composée de deux fonction continues est continue.

Théorème 5 ;Soit I et J deux intervalles ouverts, a un réel de I, b un réel de J et b' un réel.
Soit u une fonction définie sur I ,sauf peut être en a et v une fonction définie sur J sauf peut être en b.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x) = b'$; alors $\lim\limits_{x\to a} v\circ u(x) = b'$

Théorème 6 :Soit u et v deux fonctions. Soit a , b et c finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v\circ u(x) = c$

Théorème 7 :Soit f , u et v trois fonctions définies sur un intervalle I , sauf peut-être en un réel a de I. soit deux réel b et b'.

- Si $u(x) \le v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{x\to a} u = b$ $\lim\limits_{x\to a} v = b'$et alors $b \le b'$
- Si $u(x) \le f(x) \le v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{x\to a} u = \lim\limits_{x\to a} v = b$ et alors $\lim\limits_{x\to a} f = b$

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère les limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Théorème 8 :Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I , sauf peut-être en un réel a de I

- Si $f(x) \ge u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{x\to a} u = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f = +\infty$
- Si $f(x) \le u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{x\to a} u = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f = -\infty$

Théorème 9 :L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème 10 : des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans $[a;b]$. En particulier , si $f(a)\times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a;b[$

Théorème 11 :Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $]a;b[$

Théorème 12 :Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I , alors elle garde un signe constant sur I.

Théorème 13 :L'image d'un intervalle fermé borné $[a;b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m;M]$. Le réel m est le minimum de f sur $[a;b]$ et Le réel M est le maximum de f sur $[a;b]$

Théorème 14 :

- Soit f une fonction sur un intervalle de type $[a;b]$ (b fini ou infini). Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b^-. Si la fonction f est croissante et majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.

- Soit f une fonction sur un intervalle de type $[a;b[$ (b fini ou infini). Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b^-. Si la fonction f est décroissante et minorée alors f tend vers $-\infty$ en b^-.

Image d'un intervalle par une fonction monotone :

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f est décroissante sur I
$I=[a;b]$	$f(I)=[f(a);f(b)]$	$f(I)=[f(b);f(a)]$
$I=[a;b[$; $(a\in\mathbb{R};b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b^-} f;f(a)\right]$
$I=[a;+\infty[$; $(a\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left[f(a);\lim\limits_{x\to+\infty} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f;f(a)\right]$
$I=]a;b[$; $(a\in\mathbb{R}\ ;\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to a^+} f;\lim\limits_{x\to b^-} f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b^-} f;\lim\limits_{x\to a^+} f\right[$

LES EXERCICES

EXERCICE 1 : Cocher la réponse exacte.

1) Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec a et b deux réels tels que $a < b$, alors :

a) f est bornée sur l'intervalle $]a,b[$.	b) L'image par f de l'intervalle $]a,b[$ est un intervalle de même nature.	c) f est continue sur tout intervalle contenu dans $]a,b[$.

2) Si f est une fonction croissante continue et ne s'annule pas sur un intervalle $[a,+\infty[$ avec a est un réel, alors :

a) $\frac{1}{f}$ est croissante sur $[a,+\infty[$.	b) $\frac{1}{f}$ est décroissante sur $[a,+\infty[$.	c) $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

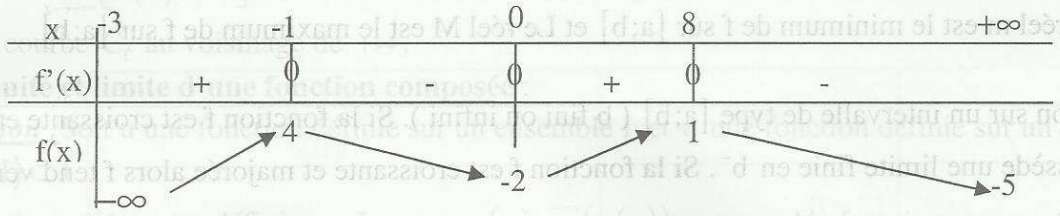
3) Si f est une fonction continue en un réel a, alors :

a) f admet une limite en a.	b) f est dérivable en a.	c) $\lim\limits_{a}\sqrt{f}=\sqrt{a}$

4) Si une fonction f non définie en a et admettant une limite finie en a, alors :

a) f est nécessairement continue en a.	b) f n'admet pas de prolongement par continuité en a	c) f admet un prolongement par continuité en a.

5) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-3,+\infty[$ dont le tableau de variation est



Sur $]-3,+\infty[$ la courbe représentative de f :

a) admet comme seule asymptote la droite d'équation : x = -3.	b) Admet exactement deux asymptotes : les droites d'équations x = -3 et y = -5.	c) Admet exactement deux asymptotes : les droites d'équations y = -3 et x = -5.

6)soit la fonction définie sur IR_+ et $\frac{x^2-1}{x^2+1} \le f(x)-2x \le \frac{x^2}{x^2+1}$ alors on a

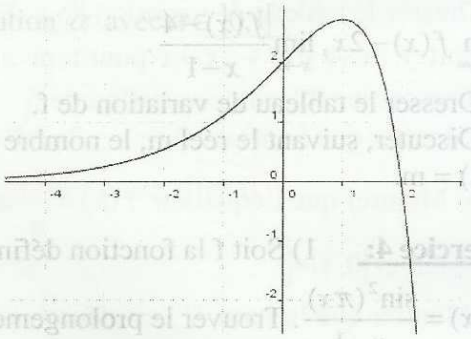
a)la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote oblique à C_f

b)la droite $\Delta : y = 2x+1$ est une asymptote oblique à C_f

c)la droite $\Delta : y = 2x$ est une direction asymptotique à C_f

7)Soit la fonction f définie sur IR ayant pour courbe (C_f)

a pour asymptote horizontale la droite d' équation y = 0 au voisinage de $+\infty$.



Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ alors

a) i) gof est continue sur IR^* ii) gof est continue sur $IR - \{2\}$ iii)gof est continue sur IR_+

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} gof(x) =$ i) $-\infty$ ii) 0 iii) $+\infty$

II) Vrai ou Faux.

1) La fonction $f : x \to \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}, x \neq 2$ est prolongeable par continuité en 1.

2) Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1,3]$.

Si f est continue sur $[1,3]$ et $\left(f(1)-10^{15}\right)\left(f(3)-10^{15}\right) < 0$, alors l'équation $f(x) = 10^{15}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1,3]$.

3) L'équation $x^9 + 3x + 15 = 0$ admet dans IR une unique solution α.

4) La fonction $x \to E(x)$ est continue sur IR.

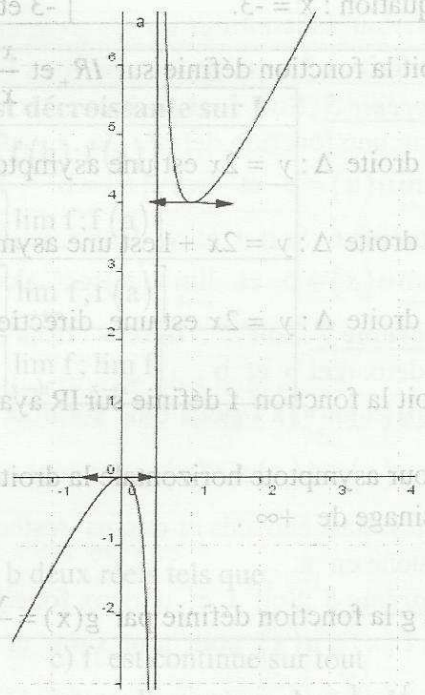
5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+3}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x - 3}{4x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\cos x-1}$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\pi x)+3+2x$.

Exercice 3 :La courbe (C) ci-dessus est celle d'une fonction f définie sur $IR\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.



La droite $\Delta : y = 2x+1$ et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ sont deux asymptotes à la courbe (C) de f.

1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Discuter, suivant le réel m, le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.

Exercice 4: 1) Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1}$. Trouver le prolongement par continuité en 1 s'il existe, de f.

2) Soit h la fonction définie sur $\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\setminus\{0\}$ par $h(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$.

Trouver s'il existe le prolongement par continuité en 0 de h.

3) Trouver un prolongement par continuité en 3 de la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x)=\dfrac{|x-2|-1}{x-3}$.

Exercice 5: Soit $f : IR\to IR$, $x\to 3x+\cos x$.

1) Montrer que pour tout $x\in IR$, on a : $-1+3x\le f(x)\le 1+3x$. En déduire $\lim\limits_{-\infty} f$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f$.

2) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans IR une solution unique α vérifiant que $-\dfrac{\pi}{6}<\alpha<0$.

Exercice 6: Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} \text{ si } x<1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-x \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que, pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$, on a $\dfrac{x+1}{x-1}\le f(x)\le 1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Montrer que f est continue sur IR.

4) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $\left]\frac{-1}{2},0\right[$.

b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha^2}$.

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) si\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 7: 1) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet dans IR une unique solution α avec $\alpha \in]0,1[$.

2) Soit f la fonction définie sur IR^* par : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{3x}$.

a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$. En déduire que $0 \le f(\alpha) \le \frac{2}{3}$.

Exercice8 Soit la fonction f définie sur $IR \setminus \{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} si\ x \in IR_+^* \setminus \{1\} \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x\ si\ x \le 0 \end{cases}$

1)a) Encadrer f(x) pour tout $x \in]0,1[$.

b) Montrer alors que f est continue en 0.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) On pose $U(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}$, $V(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour $x \in IR_+^* \setminus \{1\}$.

a) Vérifier que pour $x \in IR_+^* \setminus \{1\}$, $f(x) = (W(x)) \times (VoU(x))$.

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1.

c) A l'aide de g, montrer que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $]1,2[$ au moins une solution α.

Exercice 9 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,2]$. On pose $g_n(x) = f(x) - 2x^n$ pour $x \in [0,1]$ et $n \in IN^*$.

1) Montrer qu'il existe un réel a_n de $[0,1]$ tel que $g_n(a_n) = 0$.

2) Montrer que si f est décroissante sur $[0,1]$ on a g_n est strictement décroissante

b) Montrer que $(a_n)_{n\in IN}$. est croissante.

Exercice 10 Soit $f_n(x) = -1 + x + x^2 + ... + x^n$ avec $x \in [0,1]$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Dresser le tableau de variation de f_n sur $[0,1]$.

2) Montrer que $f_n(x) = 0$ admet une seule solution notée α_n avec $n \geq 2$.

3) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

4) Montrer que $\alpha_n = \dfrac{1+(\alpha_n)^{n+1}}{2}$.

Exercice 11 Soit g la fonction définie sur D = $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1$.

1) Dresser le tableau de variation de g. En déduire le signe de g(x) pour $x \in D$.

2) Soit $f : x \to \sqrt{x^2+2x} - x$ pour tout $x \in D$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = -2x - 1$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet, pour tout $n \in IN^* \setminus \{1\}$, une solution unique U_n dans $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

b) Montrer que la suite U_n est décroissante

Exercice 12 Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a)Etudier les variations de f.

b) Montrer que le point $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

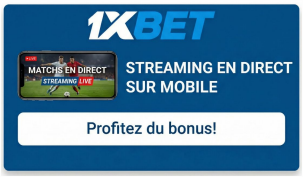
2) a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α tel que $\alpha \in \left]\dfrac{3}{4},1\right[$.

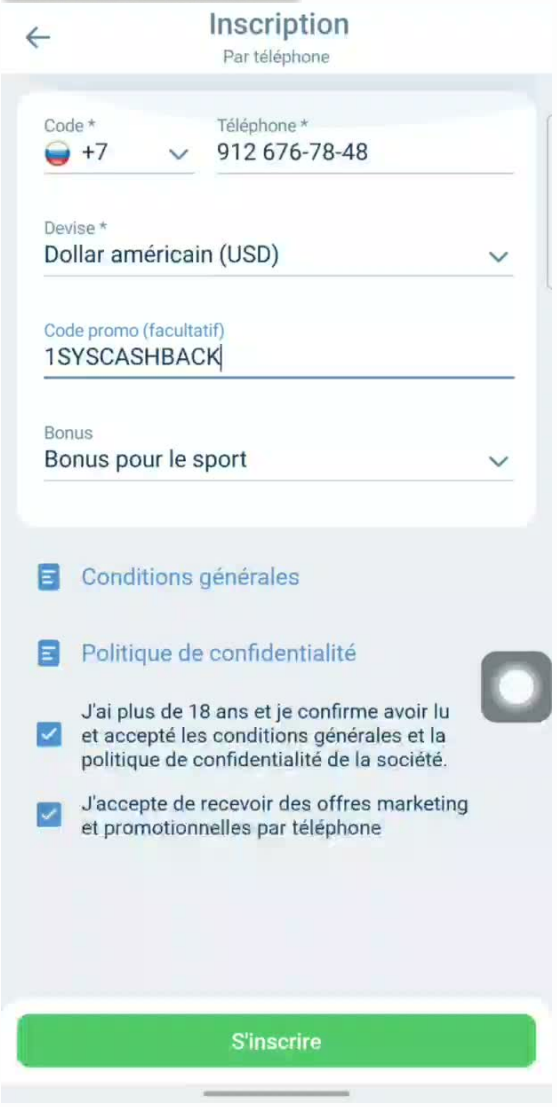
b) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite $\Delta : y = x$.

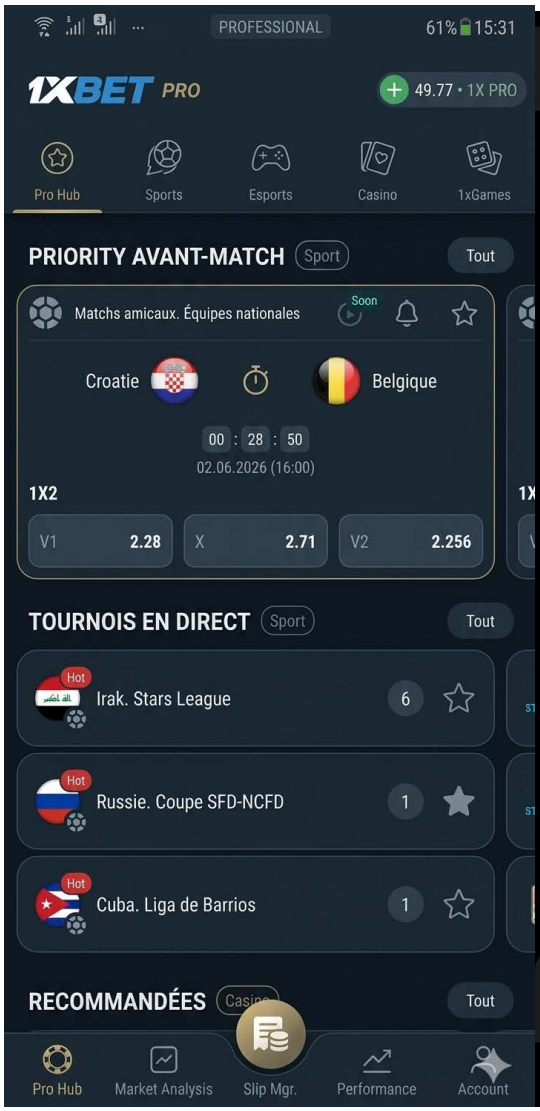
c) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) et la droite Δ.

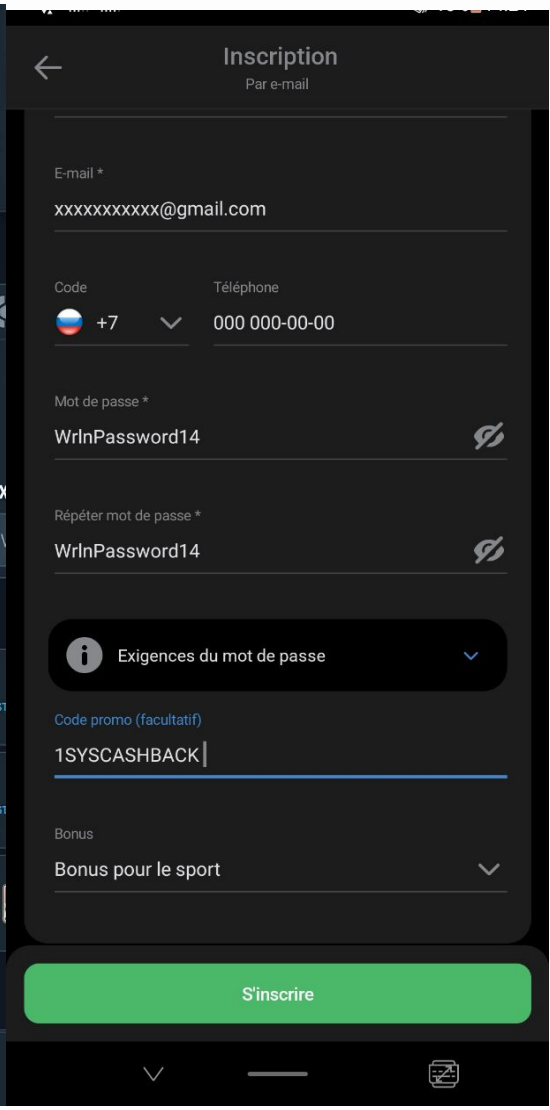
3) On considère la fonction h définie sur $\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ par : $\begin{cases} h(x) = 2f\left(\dfrac{1}{2}tg(\pi x)\right) si\ x \in \left]\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right[\\ h\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 0 \\ h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \end{cases}$

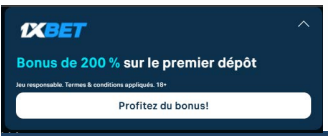
Montrer que h est continue sur $\left[\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

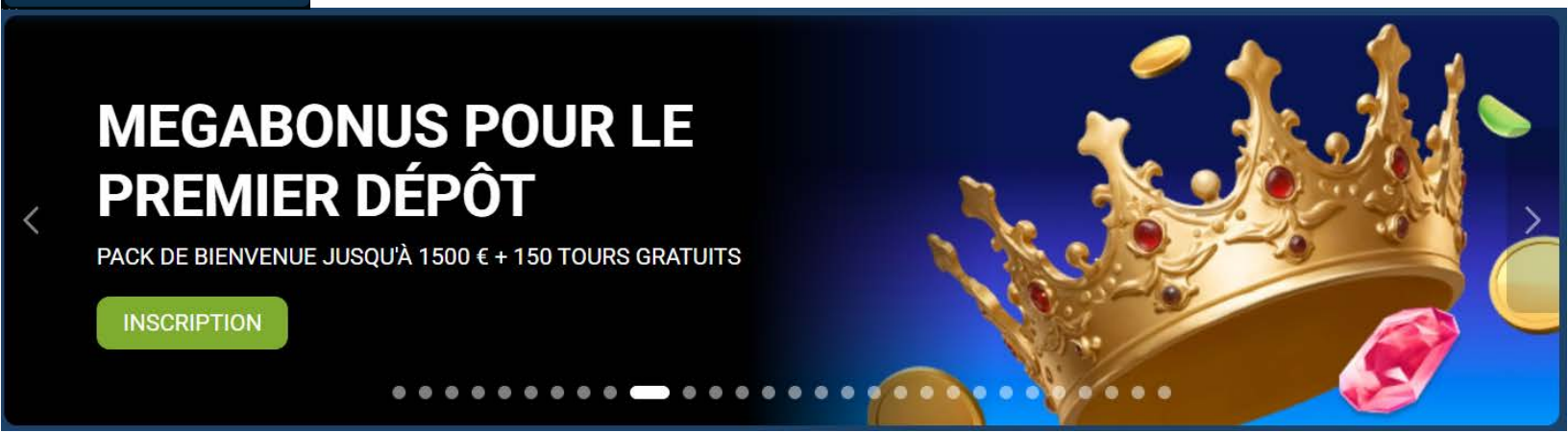

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

Exercice 13 1) Montrer que pour tout $x \in IR$, $x-1 < E(x) \leq x$.

2) Soit $f(x) = \pi - xE\left(\frac{\pi}{x}\right)$, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 14: Soient f et g deux fonctions définies sur IR par : $f(x) = E(x) - \left(x - E(x)\right)^2$

et $g(x) = x - E(x) - \left(x - E(x)\right)^2$.

1) Etudier la continuité de f et g.

2) Réponds par vrai ou faux en justifiant la réponse : la composée de deux fonctions l'une continue sur I et l'autre discontinue sur I n'est pas continue sur I

Exercice 15: Soit f une fonction continue sur $[1,2]$ et vérifiant $f([1,2]) \subset [3,4]$.

1) Montrer que l'équation $\frac{f(x)}{x} = 2$ admet au moins une solution α dans $[1,2]$.

2) On suppose que f est dérivable sur $[1,2]$ et que pour tout $x \in [1,2]$, $f'(x) > 2$.

Montrer que α est unique.

Exercice 16 Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

1) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet trois solutions distinctes comprises entre -1 et 1.

2) a) Soit α un réel. Montrer que $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$.

b) En posant $X = \cos\alpha$, déterminer les solutions de l'équation f(x) = 0.

Exercice 17 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos \pi x}{1 + E(x)}$

1) Donner le domaine de définition de f.

2) Etudier le prolongement par continuité de f en -1.

3) Etudier la continuité de f en 0 et en 1.

Exercice 18 Soit f l'application de IR dans IR définie par $\begin{cases} f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \in IR^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Soit q un entier relatif non nul, étudier la continuité à droite et à gauche en $\frac{1}{q}$.

2) Démontrer que f est continue en 0(vérifier d'abord que $x - 1 \leq E(x) \leq x$).

Exercice 19 Soit f et g deux fonctions continues sur IR tels que :

$\begin{cases} f \circ g = g \circ f \\ \text{L'équation } f(x) = g(x) \text{ n'a pas de solution} \end{cases}$

Montrer que l'équation $f \circ f(x) = g \circ g(x)$ n'a pas de solution.

Exercice 19 Soit f une fonction impaire sur $[-1;1]$ telle que

$\left(\forall n \in IN^*\right); f(x) = \frac{1}{n+1}$ si $x \in \left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right[$; $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ et $f(0) = 0$ Étudier la continuité de f en 0.

RESUME DU COURS

Théorème 1 :Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$

Théorème 2 : Toute suite convergente est bornée

Théorème 3 :Soit (u_n) une suite convergente vers un réel a.

- S'il existe un entier N_0 tel que $0 \le u_n$ pour tout $n \ge N_0$; alors $0 \le a$
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \le 0$ pour tout $n \ge N_0$; alors $a \le 0$

*Théorème 4 :*Soit un entier naturel N_0 et une suite (u_n) ; $n \ge 0$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tel que $m \le u_n \le M$; $n \ge 0$. Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a , alors $m \le a \le M$

Opérations sur les limites de suites :

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$
a	b	a+b
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique le règle des signes)
$-\infty$	b si $b > 0$	$-\infty$
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a \neq 0$	0	∞ (on applique le règle des signes)

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \times v_n)$
a	b	a b
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique le règle des signes)
∞	∞	∞ (on applique le règle des signes)

*Théorème 5 :*Soit (u_n) une suite géométrique définie par : $u_n = q^n$; $n \ge 0$; où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $|q| < 1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q \le -1$; alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$; alors la suite (u_n) est constante.

*Théorème 5 :*Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I . si (u_n) tend vers a de I alors $f((u_n))$ tend vers $f(a)$

Théorème 6: Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I . si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to l} f(x) = L$ (fini ou infini) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n)) = L$

Théorème 7 : Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers deux réels a et b. s'il existe un entier N_0 tel que $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge N$ alors $a \le b$

Théorème 8 : Soit trois suites réelles (u_n) ; (v_n) et (w_n). Soit a un réel. On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \le u_n \le w_n$; $n \ge N_0$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$

Théorème 9 : Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \le |u_n| \le v_n$; $n \ge N$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Théorème 10 : Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

- S'il existe une entier N_0 tel que $u_n \le v_n$; $n \ge N$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$
- S'il existe une entier N_0 tel que $u_n \le v_n$; $n \ge N$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Théorème 11 : Soit (u_n) une suite définie pour $n \ge 0$. Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \ge 0$; $u_n \le a$.

Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \ge 0$; $u_n \ge b$.

Théorème 12 : Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Théorème 13 : Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \ge 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en a alors $a = f(a)$

Théorème 14 : Deux suites $(u_n)_{n\ge0}$ et $(v_n)_{n\ge0}$ sont adjacentes lorsqu'elle vérifient les conditions.

- Pour tout $n \ge 0$; $u_n \le v_n$.
- La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
- La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

LES EXERCICES

Exercice 1 Pour chacune des questions suivantes, plusieurs affirmations sont proposées.

Dire si ces affirmations sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1) On considère les suites U et V définies par : $U_0 = 1, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n$ *et* $V_0 = 1, V_{n+1} = V_n + \frac{1}{3^n}$.

a) U est une suite géométrique. b) V est une suite arithmétique.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. d) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$.

2) Soit U la suite définie par $U_n = \frac{c^n}{n^{10}}$ où c est un réel de l'intervalle]0,1[.

a) U est croissante b) U est décroissante c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$. d) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) Pour une suite réelle (U_n), on a :

a) Si (U_n) converge, alors $(U_n{}^2)$ est convergente. b) Si $(U_n{}^2)$ converge, alors (U_n) converge.

c) Si (U_n) est bornée, alors (U_n) converge. d) Si (U_n) converge, alors (U_n) est bornée.

e) Si $(U_n{}^2)$ est bornée, alors (U_n) est bornée.

Exercie 2

On considère 3 suites réelles U, V et W qui vérifient $U_n \le V_n \le W_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pour chacune des questions suivantes, il y'a deux conclusions correctes. Vous devez donner au plus deux réponses (celles que vous jugez correctes).

1) Si U et V sont adjacentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$, alors :

a) $l \le U_n \le V_n$ b) $U_n \le l \le V_n$ c) $U_n \le U_{n+1} \le l \le V_{n+1} \le V_n$ d) $U_n \le V_n \le l$.

2) Si la suite V tend vers $-\infty$, alors :

a) La suite W tend vers $-\infty$ b) La suite U est majorée c) La suite U tend vers $-\infty$

d) la suite W n'a pas de limite.

3) Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \ge 1, W_n = 2U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$, alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$ b) La suite W tend vers $+\infty$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (W_n - U_n) = l$

d) On ne peut pas dire si la suite V a une limite ou non.

4) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -2$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 2$, alors :

a) La suite V est majorée b) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ c) La suite V n'a pas de limite

d) On ne peut pas dire si la suite V a une limite ou non.

5) Si $U_n = \frac{3n^2+2}{n^2}$ *et* $W_n = \frac{3n^2+5}{n^2}$, alors : a) $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 3$

d) On ne peut pas dire si la suite V a une limite ou non.

Exercice 3

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fasse en justifiant votre réponse.

1) Si $(U_{2n})_n$ converge et $(U_{2n+1})_n$ converge, alors $(U_n)_n$ converge.

2) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{1-(-1)^n n}{(-1)^n + n}$; $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 2$. La suite (U_n) est convergente.

3) La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \frac{n\cos(n\pi)}{n+1}$ est convergente.

4) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ alors (U_n) est convergente.

5) Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :

x	3	6
f(x)	6	5

Si (U_n) est la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ alors (U_n) est croissante

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1;2;....;n\}$, On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ et on suppose que

$\frac{k}{2n^2+1} \le U_k \le \frac{k}{2n^2}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$

7) U suite croissante et V suite décroissante telles que $U_n \le V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors U et V convergent vers une même limite.

8) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 5| \le \frac{3}{n+2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 5$.

9) Toute suite négative et minorée converge.

10) Soit U et V deux suites telles que $U_n \le V_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$, alors U et V sont adjacentes.

11) Une suite qui tend vers $-\infty$ ne peut pas être minorée.

12) La somme de deux suites monotones est monotone.

Exercice 4

Vérifier que $1-\frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}$ et $1-\frac{2}{k(k+1)} = \frac{k-1}{k}\times\frac{k+2}{k+1}$ $\forall K \in \mathbb{N}^*$

Calculer les limites des suites U et V définies par : $U_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

et $V_n = \left(1-\frac{2}{2\times3}\right)\left(1-\frac{2}{3\times4}\right)\left(1-\frac{2}{4\times5}\right)....\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

Exercice 5 Soit U et V les deux suites définies par : $U_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$

et $V_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

a) Vérifier que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ $\forall K \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

b) Montrer que $V_n - 1 \le U_n$.

c) Montrer que la suite V converge vers un nombre $\alpha \in]1,2[$.

Exercice 6 1) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{n^2}{n^2+n} \le U_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$

b) En déduire que U est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite V définie pour $n>1$ par $V_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$

Vérifier que $\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\ \ \forall K>1$

En déduire que V est convergente et calculer sa limite

3) Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kt)$ avec $t\in\mathbb{R}$

a)Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}$ *et* $K\in IN, kt-1<E(kt)\le kt$

b) En déduire que W est convergente et calculer sa limite

4) Vérifier que $\forall k\in\{2,3...n-2\}, C_n^k\ge\frac{n(n-1)}{2}$

Calculer la limite de la suite S définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^{-1}$

Exercice 7 1) Soit $f:x\mapsto\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Montrer que $\forall x\in]0,1[, 0<f(x)<x$.

b) Montrer que $\forall x\in]0,1[, 0<g(x)<\frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) Soit la suite U définie par $U_0=\frac{1}{2}$ *et* $U_{n+1}=f(U_n)\ \forall n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que $0<U_n<1\ \forall n\in\mathbb{N}$.

b) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<U_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}}U_n$.

c) Montrer, alors, que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<U_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 8 Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=\frac{a^n}{n!}$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$.

1) Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

2)a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n\ge n_0$, on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n}\le\frac{1}{2}$.

b) En déduire que $\forall n\ge n_0: 0\le U_n\le U_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$ et que U est convergente et calculer sa limite.

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n!}{8^n+n!}$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{2^n+5^n}$.

3) Montrer que $\frac{n^{n-1}}{n!} > 1 \; \forall n \geq 2$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Exercice 9 Soit U et V deux suites telles que $0 \leq U_n \leq 1$ *et* $0 \leq V_n \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1$.

Exercice 10 Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = \frac{\pi}{2} \text{ et } U_2 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{n}{n+1} U_n \end{cases}$

1) Déterminer, en fonction de n, les termes U_{2n+1} *et* U_{2n+2}.

2) On suppose que la suite U est décroissante et converge vers $l > 0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, no a : $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}} \leq 1$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n+1}}$.

b) Montrer, alors, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2\times4\times6\times...\times2n}{3\times5\times7\times...\times(2n-1)} \right)^2 \times \frac{2}{2n+1} \right] = \pi$.

Exercice 11 On considère la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1) Etudier la monotonie de la suite U.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) En déduire que la suite U diverge vers $+\infty$

3) Montrer par une autre méthode que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercice 12 On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{2n}}{2} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ par : $f(x) = 1 - x - \cos x$.

Etudier les variations de f. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \cos x \geq 1 - x$.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq U_n \leq 1$.

En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

Exercice 13 Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \dfrac{n^2}{U_n} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

1) a) Calculer U_2

b) Montrer, par récurrence, que $\forall n \geq 2, n < U_n < n+1$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{n}$.

c) Montrer que la suite U est strictement croissante.

d) La suite U est-elle majorée ?

2°) On définit la suite W par $W_n = \dfrac{1}{U_n - n} - 1$.

a) Calculer W_1 et montrer que $W_{n+1} = \dfrac{1}{W_n + \dfrac{1}{n}}$

b) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - \dfrac{1}{n} \leq W_n \leq 1$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - n)$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k W_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k (W_k - 1)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left| S_n - \dfrac{n+1}{2n} \right| \leq \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que la suite (S_n) converge et donner sa limite.

Exercice 14 On considère la suite U définie par : $U_0 = 1$ *et* $U_{n+1} = U_n + \dfrac{2}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $U_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite U est croissante.

c) Montrer que U diverge vers $+\infty$.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $V_n = \dfrac{{U_n}^2}{4}$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $V_{n+1} - V_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $V_n \geq n$. Déduire la limite de V_n.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $1 \leq V_{n+1} - V_n \leq 1 + \dfrac{1}{4n}$.

Déduire la limite de la suite $(V_{n+1} - V_n)$.

Exercice 15 Soit la suite U définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cos(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\le U_n\le\frac{\pi}{2}$

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si $U_{n+1}>U_n\Rightarrow U_{n+2}<U_{n+1}$ et $U_{n+3}>U_{n+2}$.

b) Que peut-on dire de la monotonie de U ?

3) Justifier que $\frac{1}{2}\cos x=x$ possède une seule solution α dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

4) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\neq\alpha$.

5) a) Montrer que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x\le x$. Déduire que $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, $\sin x\ge x$.

Conclure que $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], |\sin x|\le|x|$.

b) Prouver que $\forall(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$, $\left|\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos y\right|\le\frac{1}{2}|x-y|$

(On rappelle que $\forall(p,q)\in\mathbb{R}^2$, $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$)

6) a) Prouver, donc, que $\forall n\in\mathbb{N}, |U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_0-\alpha|$

c) Préciser donc la limite de U.

7) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $S_n=\sum_{k=0}^{n}U_k$.

a) Etudier la monotonie de (S_n)

b) Montrer par l'absurde que (S_n) ne peut pas être convergente.

c) Prouver donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

Exercice N° 16: On considère la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases}U_0=2\\ U_{n+1}=\dfrac{1}{(U_n)^2}\ ;\ n\ge0\end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $n\ge0; U_{n+2}=(U_n)^4$.

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n=U_{2n+1}$; $n\ge0$.

a) Montrer que pour tout $n\ge0; 0<V_n\le\frac{1}{2}$

b) Montrer que pour tout $n\ge0; V_{n+1}\le\frac{1}{8}V_n$

c) En déduire que pour tout $n \geq 0; V_n \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

3) Soit (W_n) la suite définie par $W_n = U_{2n}; n \geq 0$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0; W_n \geq 2$

b) Montrer que pour tout $n \geq 0; W_{n+1} \geq 8W_n$

c) En déduire que pour tout $n \geq 0; W_n \geq 8^n$.

4) La suite (U_n) est-elle convergente ?

Exercice 17 Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 < U_n < 0$

b) Montrer que U est décroissante ; en déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} + 1 \leq \frac{2}{\sqrt{5}}(1+U_n)$

b) En déduire que pour tout $n \in IN, U_n + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} + 1 > \frac{1+U_n}{\sqrt{2}}$.

b) En déduire que la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\sqrt{2}(U_{k+1}+1) - U_k\right]$ est divergente.

4) Trouver un encadrement de $\sum_{k=0}^{n} U_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} U_k$.

Exercice 18 Soit la suite réelle U définie par $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n^2 - U_n + 8}{U_n^2 + 3} \end{cases}$

1) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

2) Vérifier que $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n^2 + 3}$

3) Soit n un entier quelconque. Montrer que si $U_n > 2 \Rightarrow U_{n+1} < 2$ et $U_{n+2} > 2$.

4) Prouver, alors, que U n'est pas monotone.

5) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq 2$.

6) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|U_n - 2|$

7) Démontrer, alors, que U converge vers 2.

8) On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

a) Prouver que (S_n) est strictement croissante.

b) Montrer par l'absurde que (S_n) n'est pas majorée.

c) Préciser, alors, $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 19 Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 > -1 \\ U_{n+1} = U_n\sqrt{1+U_n} \end{cases}$

1) On suppose que $U_0 \in]-1,0[$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 < U_n < 0$.

b) Montrer que U est croissante.

c) Montrer que U est convergente et qu'elle converge vers 0.

2) On suppose que $U_0 > 0$.

a) Etudier la monotonie de la suite U.

b) Montrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq \sqrt{1+U_0}$

c) Trouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3) Soit la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{1+x}$.

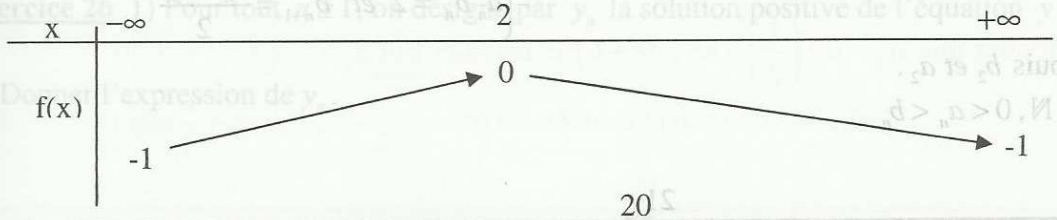
Montrer que : pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x \leq f(x) \leq x + \frac{x^2}{2}$ (1)

4) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Montrer, à l'aide de (1), que : $\frac{n+1}{2n} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3}$. En déduire la limite de S_n.

Exercice 20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$;dont son tableau de variations est le suivant :



1) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}$ admet deux solutions (a_n) *et* (b_n) appartenant respectivement aux intervalles $]-\infty,2]$ *et* $[2,+\infty[$.

2) Etudier la monotonie des suites (a_n) *et* (b_n).

3) Montrer que (a_n) est convergente et déterminer sa limite. Montrer que (b_n) est convergente et déterminer sa limite. Conclure.

Exercice 21 Soient les suites (U_n) et (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0=2, V_0=1 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n+V_n}{2} \quad \text{et} \quad V_{n+1}=\sqrt{U_nV_n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) Calculer U_1, U_2 et V_2

b) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0\le V_n\le U_n$

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et que (V_n) est croissante

2)a) Vérifier que $V_n\le\sqrt{U_nV_n}$ .Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}-V_{n+1}\le\frac{1}{2}(U_n-V_n)$

b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $U_n-V_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et qu'elle converge vers le même réel L

d) Donner une valeur approche de L à 10^{-3} près.

Exercice 22 Soit U et V les deux suites définies par $U_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$ *et* $V_n=U_n+\frac{1}{(4n+4)!}$.

1) a) Montrer que la suite U est strictement croissante et que la suite V est strictement décroissante.
b) En déduire que U et V sont deux suites adjacentes.
On désigne par l leur limite commune.
2) On se propose de montrer que l est irrationnel.
a) Justifier que $U_n<l<V_n \ \forall n\in\mathbb{N}$.

b) On suppose qu'il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $l=\frac{p}{q}$.

Montrer qu'il existe un entier r tel que $r<\frac{p}{q}(4q+4)!\le r+1$.

c) Conclure que l est irrationnel.

Exercice 23 Soit (a_n) *et* (b_n) les deux suites réelles définies par $\begin{cases} a_0=1, \ b_0=2 \\ a_nb_n=2 \ \text{ et } \ b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$

1) a) Calculer b_1 *et* a_1 puis b_2 *et* a_2.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0<a_n<b_n$

2) a) Montrer que (b_n) est décroissante et que (a_n) est croissante.

b) En déduire que les deux suites (a_n) *et* (b_n) sont convergentes.

3) a) Montrer que $0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ et que $0 < b_n - a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Montrer, alors, que (a_n) *et* (b_n) convergent vers une même limite. Conclure.

4) On pose (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{n}{2^n}$.

a) Etudier la monotonie de (x_n), en déduire qu'elle est convergente.

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

c) Soit (y_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $y_n = n(b_n - a_n)$. Montrer que (y_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 24 On considère la suite (F_n) définie par : $F_0 = 1,\quad F_1 = 1\ ,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On notera que la troisième information signifie que tout terme de la suite (à partir du troisième) est égal à la somme des deux termes qui le précédent. Pour l'information, F_n représente l'effectif de la population des ancêtres de nième génération d'une abeille mâle.

1) Démontrer, par récurrence, que $F_n \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire à propos de la limite de la suite (F_n) ?

2) Démontrer par récurrence que $F_n \times F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$

3) Pour la suite de l'exercice, on considère les suites $(\varphi_n), (u_n)$ *et* (v_n) définies par les égalités :

$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, $u_n = \varphi_{2n}$ *et* $v_n = \varphi_{2n+1}$.

a) Déterminer une écriture fractionnaire de $\varphi_{n+1} - \varphi_n$. En déduire que $\varphi_{n+2} - \varphi_n = \frac{(-1)^n}{F_n \times F_{n+2}}$.

b) Déterminer le sens de variation des suites (u_n) *et* (v_n).

c) Démontrer que les suites (u_n) *et* (v_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (φ_n) converge.

d) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\varphi_n^{\,2} - \varphi_n - 1\right) = 0$.

e) En déduire la valeur de la limite de la suite (φ_n).

Exercice 25 Soit U une suite à termes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que U converge si et seulement si elle est stationnaire càd il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(U_n)_{n\geq p}$ soit constante.

Exercice 26 1) Pour tout $n \geq 1$, on désigne par y_n la solution positive de l'équation $y = 1 + \frac{n}{y}$.

a) Donner l'expression de y_n.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{n}{y_{n-1}} \leq \frac{n+1}{y_{n+1}}$.

2) Soit U la suite définie par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{n}{U_n} \quad pour\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $y_n \leq U_{n+1} \leq y_{n+1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 27: Soit u et v les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ et $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1)a)Exprimer v_n en fonction de n.

b) Calculer la limite de la suite v.

c) Montrer que pour tout $n \geq 5, v_n \leq \frac{3}{4}$

2) Montrer par récurrence que pour tout Montrer que Montrer que $n \geq 5, u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5}$

3) Pour tout entier $n \geq 5$, on pose $S_n = \sum_{k=5}^{n} u_k$

a) Montrer que $S_n \leq 4$.

b) prouver alors que la suite (S_n) est convergente.

Exercice 28 Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 U_n \end{cases}$$

1) a) Montrer que U est décroissante pour $n \geq 3$.

b) Prouver que U est convergente et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

2) $V_n = \frac{U_n}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que V est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $S_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (n^2 + 4n + 6)$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 29 Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x$

1) Quel est le sens de variation de f_n ? Exprimer $f_n(x)$ à l'aide du symbole $\sum$

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution que l'on notera a_n.

3) Montrer que $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$; en déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $a_n > \frac{1}{2}$.

4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + 1$. En déduire que $a_{n+1} \leq a_n$.

5) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite L et que $\frac{1}{2} \leq L$.

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{2^n} \leq f_n(L)$.

6) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $f_n(L) \leq 1$. En déduire la limite de la suite $(f_n(L))$.

7) Montrer que $f_n(L) = L\frac{1-L^n}{1-L}$. En déduire que $\frac{L}{1-L} = 1$, puis la valeur de L.

Exercice 30 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 3}$

1) a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a : $2f(x) \geq 1$.

b) Etudier le signe de $2f(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.

2) Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = 2f(U_n)$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite U.

c) En déduire que la suite U est convergente et trouver sa limite.

3) a) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a : $0 \leq f(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}(x-1)$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|U_n - 1|$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 31: Soit $f_n(x) = x^n + x - \frac{1}{2}$; avec $n \geq 2$.

1)a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une seule solution.

Cette solution qui dépend de n sera notée a_n.

b) Vérifier que $0 < a_n < \frac{1}{2}$.

2)a) Vérifier que $\frac{1}{2} - a_n = (a_n)^n$. b) En déduire la limite de la suite a_n.

RESUME DU COURS

Définitions : f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=b$ (fini) ; b est le nombre dérivé de f en a , il est noté $f'(a)=b$.

Théorème 1 :Si f est dérivable et strictement positive sur un intervalle I de IR. Alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{f}\right)'=\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$x\mapsto a$ (a constate)	IR	$x\mapsto 0$
$x\mapsto x$	IR	$x\mapsto 1$
$x\mapsto x^n$ $n\in\mathbb{N}$; $n\geq 1$	IR	$x\mapsto n.x^{n-1}$
$x\mapsto \dfrac{1}{x^n}$	IR^*	$x\mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$x\mapsto \sqrt{x}$	IR_+^*	$x\mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\mapsto \cos(ax+b)$	IR	$x\mapsto -a\sin(ax+b)$
$x\mapsto \sin(ax+b)$	IR	$x\mapsto a\cos(ax+b)$
$x\mapsto tg(ax+b)$	$I=\left\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que : } ax+b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$	$x\mapsto a\left(1+tg^2(ax+b)\right)$
$x\mapsto cotg(ax+b)$	$I=\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que : } ax+b\neq k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$	$x\mapsto a\left(1+cotg^2(ax+b)\right)$

Opérations sur les dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
λu	$\lambda u'$
uv	$u'v+v'u$
u^n ; $n\in\mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{v}$ (v ne s'annule pas sur I)	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Dérivée d'une fonction composée :

Soit deux fonctions U dérivable sur I et V dérivable sur J et pour tout $x\in I; f(x)\in L$ alors $V-U$ est dérivable sur I et $(V-U)'=(V'-U')$

Théorème des accroissements finis :

Si f une fonction continue sur $[a;b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a;b[$ alors il existe au moins un réel $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Inégalités des accroissements finis :

- Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x\in I$; $m\le f'(x)\le M$ alors pour tout a et b $\in I$ $(a\neq b)$ On a : $m\le\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$
- Si f est dérivable sur un intervalle I et s'il existe un réel $k>0$ tel que $\forall x\in I$; $|f'(x)|\le k$ alors pour tout a et b de I On a : $|f(b)-f(a)|\le k(b-a)$

Théorème :Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $f(x)\neq 0$ alors f garde un signe constant.

Approximation affine :

Définition : soit f une fonction dérivable en a. une valeur approchée de $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)\times h$. On dit que $f(a)+f'(a)\times h$ est une approximation de f en a.

LES EXERCICES

Exercice 1 Cocher la réponse exacte :

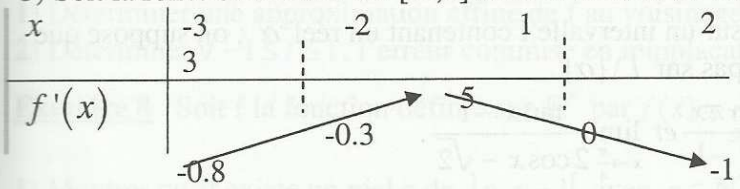
1) La fonction $x\mapsto\cos(6x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

a) $x\mapsto 12\sin(6x^2)$.	b) $x\mapsto -12x\sin(6x^2)$	c) $x\mapsto -12\sin(6x^2)$

2) Soit f : $x\mapsto -\dfrac{1}{3}x^3-2x$ et g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g'(t)\le 0\ \forall t\in\mathbb{R}$, alors gof est :

a)décroissante sur $\mathbb{R}$	b) croissante sur $\mathbb{R}$	c) constante sur $\mathbb{R}$

3) Soit la fonction définie sur [-3,3] dont le tableau de variation de f ' est :



i)

a) f(-3) < f(-2)	b) f(1) > f(2)	c) f(2) > f(3).

ii) Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation:

a) y = -2 x	b) y = (-0.3) x	c) y = 2.

4) f est une fonction dérivable sur [-2,2], alors :

a) f est bornée sur [-2,2]

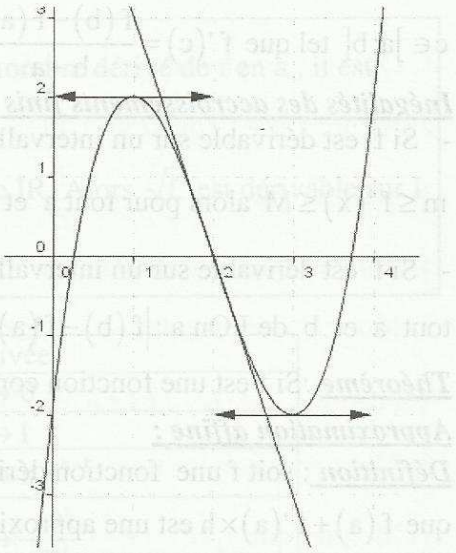
b) Si f '(1) = 0, alors f admet un extremum en 1.

c) Si f ' est décroissante sur [-2,2], alors f est négative sur [-2,2].

5) Soit f une fonction dérivable sur [1,8] telle que $|f'(t)| \le 5 \ \forall t \in [1,8]$, alors :

a) $|f(8)-f(1)| \le 35$ b) $36 \le f(8)-f(1) \le 40$ c) $40 \le f(8)-f(1)$

Exercice 2 Le graphique donné ci-dessous est celui de ζ_f courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ses tangentes aux points d'abscisses 1, 2 et 3.

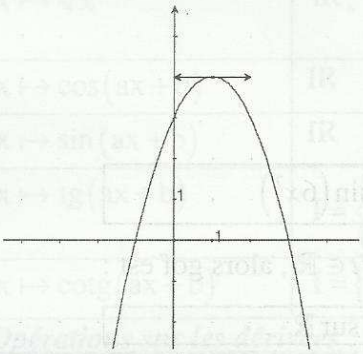


1) Déterminer f(1), f'(1) et f'(3).

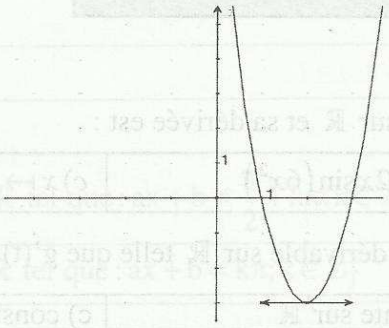
2) Résoudre graphiquement l'équation f '(x) > 0.

3) Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h}$.

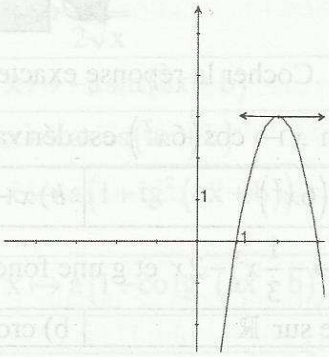
4) Parmi les trois courbes données ci-dessous, laquelle est la représentation graphique de f ' en justifiant votre choix.



A



B



C

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I contenant un réel α ; on suppose que $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ et que $f'(\alpha)\neq 0$ et f ne s'annule pas sur $I\setminus\{\alpha\}$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$ *et* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$.

Exercice 4 1) a) Etudier sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ le sens de variation des fonctions f et g définies par

$f(x)=x-\sin x$ *et* $g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$. En déduire que $x-\dfrac{x^3}{6}\le \sin x\le x \ \forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Déduire que $x\le \sin x\le x-\dfrac{x^3}{6} \ \forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ et que $\left|\dfrac{\sin x-x}{x}\right|\le\dfrac{x^2}{6} \ \forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$.

2) Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ h(0)=1 \end{cases}$ Montrer que h est continue et dérivable en 0.

Exercice 5 1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=1-\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$; on désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$; $x\in[0;1[$.

Montrer que g est strictement croissante sur $[0;1[$.

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution α dans $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$.

b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.

4) Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par : $\begin{cases} h(x)=f\circ g(x) \text{ si } x\in[0;1[\\ h(1)=0 \end{cases}$.

Montrer que h est continue sur $[0;1]$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{3x+4}$

1) Déterminer l'approximation affine de f(t) voisin de 0.

2) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{4,000048}$ puis comparer le résultat avec celui affiché par la calculatrice

Exercice7 f définie sur $\mathbb{R}_\{-5\}$ par $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$.

1) Déterminer une approximation affine de f au voisinage de (-1).

2) Déterminer $\forall -1\le t\le 1$, l'erreur commise en remplaçant f(-1+t) par f(-1) + t f'(-1)

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

1) Montrer qu'il existe un réel c de $]p,p+1[$ avec $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{p^3}-\dfrac{1}{(p+1)^3}=\dfrac{3}{c^4}$.

2) En déduire que $\dfrac{3}{(p+1)^4}<\dfrac{1}{p^3}-\dfrac{1}{(p+1)^3}<\dfrac{3}{p^4}$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x)=\tan(\dfrac{\pi}{3}x)$.

1) Montrer que $\dfrac{\pi}{3}\le f'(x)\le\dfrac{4\pi}{3}\ \forall x\in[0,1]$.

2) En déduire que $\frac{\pi}{3}h \le \tan(\frac{\pi}{3}h) \le \frac{4}{3}\pi h \ \forall h \in [0,1]$.

Exercice 10 Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 1$.

1) a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[1;+\infty[$ une unique solution α et que $1.3 < \alpha < 1.4$.

c) Montrer que $\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = \alpha$

2) Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et que pour tout x de $[1;+\infty[$; $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$; $-\frac{1}{2} \le f'(x) \le 0$

c) En déduire que pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$; $-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\alpha \le f(x) \le \alpha$

Exercice 11 Soit $g(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

1) a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Montrer que I (0, -1) est un centre de symétrie de ζ_g.

2) Soit $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3} - x + 1\right)$.

a) Vérifier que $f'(x) = \frac{1}{2}g(x)$ puis étudier les variations de f.

b) Montrer que ζ_f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations puis construire la courbe ζ_f.

3) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $U_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2}|a-b| \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$.

c) En déduire que $|U_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|U_n - 1|$ puis montrer que $|U_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ si \ x \ge 0 \\ f(x) = \cos(\pi x) \ si \ -1 \le x < 0 \\ f(x) = \sqrt{-x-1} - 1 \ si \ x < -1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0 et en -1. 2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1.
3) Déterminer f '(x) pour $x\in]0,+\infty[$, $x\in]-1,0[$ *et* $x\in]-\infty,-1[$.
4) Dresser le tableau de variation de f. 5) En déduire que $1\le f(x)\le 2\ \forall x\ge 0$.
6) Soit $S_n=\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k^2+1}$. a) En utilisant 5), montrer que $0\le S_n\le\frac{n+1}{n^2+1}$. b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.
7) Soit g(x) = f(x) – x pour $x\ge 0$. a) Dresser le tableau de variation de g.
b) En déduire que l'équation f(x) =x admet une seule solution α dans $\mathbb{R}_+$ et que $1<\alpha<2$.
c) En déduire le signe de g(x).
8) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=f(U_n)\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$ a) Montrer que $1\le U_n\le\alpha\ \forall n\in\mathbb{N}$.
b) Montrer que la suite U est croissante.En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

Exercice 13 A/ Soient $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1$ *et* $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ avec $x\in\mathbb{R}$.
1) Etudier les variations de g et en déduire le signe de g(x). 2) Etudier les variations de f.
3) a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ. Etudier la position de C_f *et* Δ. b) Tracer C_f.
B/ 1) Montrer à l'aie de l'égalité des accroissements finis appliquée à f sur [x,x+1] que :
$\forall x\in\mathbb{R}: g(x)\le f(x+1)-f(x)\le g(x+1)$.
2) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}g(k)$. a) Calculer U_0 *et* U_1.
b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{f(n)}{n+1}\le U_n\le\frac{f(n+1)-1}{n+1}$.c) en Déduire que U est convergente.
3) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1^1+1}}+\frac{2}{\sqrt{2^2+1}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.
Montrer que (v_n) est convergente vers 1.

Exercice 14 A) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.
1) Déterminer le domaine de définition D de g.
2) a) Montrer que $g(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. b)En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.
3) Montrer que g est impaire. 4) Etudier la dérivabilité de g en 0 et à droite en 1.
5) Dresser le tableau de variation de g.
B) Soit $\begin{cases}f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]\\f(x)=g(x)\ si\ x\in[0,1]\end{cases}$
1) Etudier la continuité de f en 0. 2) Etudier la dérivabilité de f en 0.
3) Déterminer f'(x) lorsque $x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$. 4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

C) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

1) a) Montrer que l'équation $\cos x - \frac{2}{\pi} = 0$ admet une seule solution x_0 dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Donner le tableau de variation de la fonction φ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$.

En déduire que $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 15 I) On considère la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}} \ si \ x \leq 0 \\ f(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} \ si \ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (ζ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

c) i) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$ .ii) Calculer f'(x) pour tout x de $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que $0 < f'(x) \leq \frac{1}{4} \ \forall x \in [1, +\infty[$.

b) En déduire que l'équation f(x) =x admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$.

c) Tracer la courbe de f en précisent une équation de la tangente à (ζ) en $(0,1)$

II) Soit U la suite définie sur IR par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) a) Montrer que $1 \leq U_n < \alpha \ \forall n \in IN$. b) Etudier la monotonie de la suite U.

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $0 < \alpha - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(\alpha - U_n) \ \forall n \in IN$.

b) En déduire que $0 < \alpha - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Trouver, alors, la limite de U.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ *et* $T_n = \frac{S_n}{n}$ .a) Montrer que $n\alpha - \frac{4\alpha}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \leq S_n < n\alpha \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer, alors, la limite de S_n. c) Déterminer la limite de T_n.

Exercice 16 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et g la fonction définie par

$g(x) = \begin{cases} f(3x) \ si \ x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ f(3x-1) \ si non \end{cases}$ A quelle condition (S) la fonction g est-elle dérivable ?

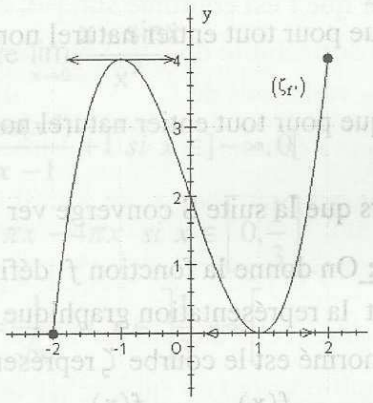
Exercice17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x)^n$. 1) Calculer f '(x) et f''(x).

2) En utilisant la formule du binôme de Newton, donner une autre expression de f(x), f '(x) et f''(x).

3) Déduire les valeurs de chacun des entiers : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, $\sum_{k=1}^{n} k\,C_n^k$, $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$.

Exercice 18 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on suppose que f ' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice N°19 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2;2]$. Le graphique ci-contre représente la courbe $(\zeta_{f'})$ de la fonction dérivée f ' de f.



I) Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse :

1) f admet un minimum local en 1

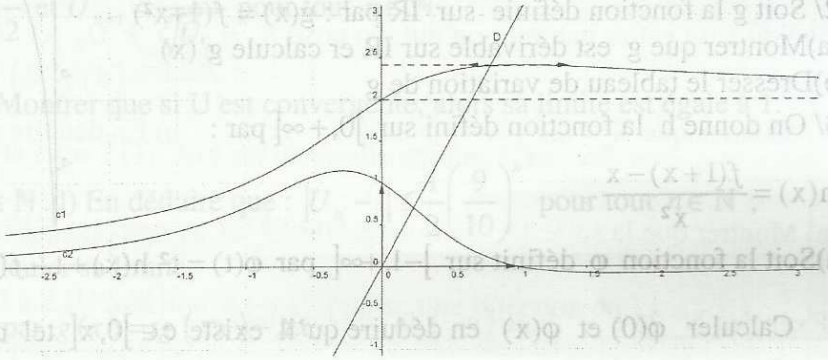
2) La courbe de f admet deux points d'inflexion.

II) Pour tout $n \geq 2$, l'équation $f'(x)=\frac{4}{n}$ admet une solution $\alpha_n \in [0;1[$ et une solution $\beta_n \in]1;2[$.

Pour chacune des questions suivantes, une ou plusieurs réponses proposées sont exactes .Indiquer chaque réponse correcte.1) La suite (α_n) est : a) Croissante ; b) Minorée ; c) Convergente

2) Les suites (α_n) et (β_n) sont : a) Croissantes ; b) Bornées ; c) Adjacentes

Exercice N° 20: Dans le graphique ci-dessous (ζ_1) et (ζ_2) sont les courbes représentatives d'une fonction f définie sur IR et de sa fonction dérivée f '. La courbe (ζ_1) admet une tangente horizontale au point $\left(1\,,\,1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ La droite $\Delta : y=0$ est une asymptote horizontale à (ζ_1) et (ζ_2) au voisinage de $-\infty$. D est la droite d'équation $y=3x$



I) 1) Justifier que (ζ_1) est la courbe de f.

2) a)Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-\left(1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{x-1}$. b) Dresser le tableau de variation de f.

3)a)Montrer que pour tout réels a et b de $[0,1]$ on a : $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$

b) Monter que l'équation : $f(x)=3x$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

II) Soit U la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ 3U_{n+1}=f(U_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a)Montrer que pour tout $n \in IN : U_n \in]0,1]$

b)Montrer que pour tout $n \in IN \left|U_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{3}\left|U_n - \alpha\right|$ et que $\left|U_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

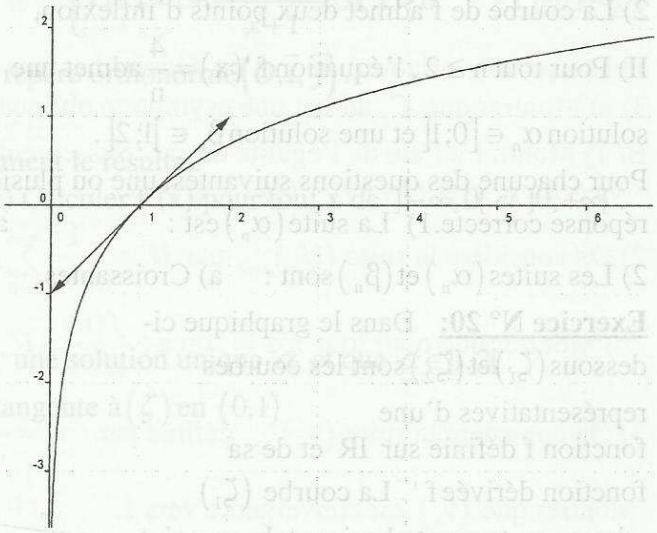
2) Soit S la suite définie sue IN*par : $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kU_k$

a)Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $S_n - \alpha\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\left(U_k - \alpha\right)$

b)Montrer que pour tout entier naturel non nul on a : $3^n \geq 2n$ en déduire que $\left|S_n - \alpha\frac{n+1}{2n}\right| \leq \frac{1}{2n}$

Montrer alors que la suite S converge ver $\frac{\alpha}{2}$

Exercice21 : On donne la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est le courbe ζ représentée ci contre



1/ a) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/ Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = f(1+x^2)$

a)Montrer que g est dérivable sur IR er calcule g'(x)

b)Dresser le tableau de variation de g

3/ On donne h la fonction défini sur $]0,+\infty[$ par :

$h(x) = \frac{f(1+x)-x}{x^2}$

a)Soit la fonction φ définit sur $]-1,+\infty[$ par $\varphi(t) = t^2\, h(x) + t - f(1+t)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(x)$ en déduire qu'il existe $c \in]0,x[$ tel que $h(x) = \frac{-1}{2(1+c)}$

b) Montrer que h est prolongeable par continuité à droite en 0.

Exercice N°22 : Soit p un entier naturel non nul fixé et soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^{p+1}$.

1°/ Montrer en utilisant les accroissements finis que :

Pour tout $x \in IR_+$, on a : $((p+1)\,x^p < (x+1)^{p+1} - x^{p+1} < (p+1)\,(x+1)^p$.

2°/ En déduire que pour tout $k \in IN^*$, on a. $K^{p+1} - (K-1)^{p+1} < (p+1)\,K^p < (K+1)^{p+1} - K^{p+1}$.

3°/ Montrer alors que pour tout $n \in IN^*$, on a : $n^{p+1} < (p+1)\,(1^p + 2^p + \ldots + n^p) < (n+1)^{p+1} - 1$.

4°/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}\right]$.

Exercice N°23 : Soit g une fonction dérivable sur [a,b], (a < b) tel que g' continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[. On définie la fonction φ sur [a,b] par :

$$\varphi(x) = g(b) - g(x) - (b-x)g'(x) - \frac{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a)}{(b-a)^2}(b-x)^2$$

1) a) Montrer que φ est continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[et déterminer l'expression de φ'(x) en fonction de x.

b)Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que φ'(c)=0. c)En déduire que $g(b)=g(a)+(b-a)\,g'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}g''(c)$.

2°/ Utiliser ce qui précède pour calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^2}$; En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$.

Exercice24 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\cos(x^2)}{x-1}+1 \ si \ x\in]-\infty,0[\\ f(x)=tg\,\pi x-4\pi x \ \ si \ x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right] \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \ si \ x\in\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[\end{cases}$

a) Etudier la continuité de f en 0 et en $\frac{1}{3}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=\frac{1}{2}$ et $U_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{U_n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que $U_n\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}$. b) Montrer que si U est convergente, alors sa limite est égale à 1.

c) Montrer que $|U_{n+1}-1|\le\frac{9}{10}|U_n-1|$ $\forall n\in\mathbb{N}$ .d) En déduire que : $|U_n-1|\le\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; montrer, alors, que U est convergente et calculer sa limite.

3) On donne la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ par $g(x)=tg\,(\pi x)-\pi x$.

a) En utilisant les variations de g et de f sur $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ montrer que : pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\pi x\le tg\,\pi x\le 4\pi x$.

b) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n=tg\left(\frac{\pi}{3n}\right)+tg\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+...+tg\left(\frac{n\pi}{3n}\right)$.Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{\pi(n+1)}{6}\le V_n\le\frac{2\pi(n+1)}{3}$.La suite V est-elle convergente ? calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_n}{n^2}$.

4) Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Etablir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{1,2,...,n\}$, $\frac{1}{\sqrt{n+k}}\ge\frac{1}{2n}$ et en déduire que $S_{2n}-S_n\ge\frac{1}{2}$.

c) Montrer que la suite (S_n) est non majorée et trouver sa limite.

Exercice N° 25: Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} & \text{si } x\le 1 \\ f(x)=\sqrt{x^2-1} & \text{si } x>0 \end{cases}$

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

c) Etudier les variations de f. d) Tracer la courbe (ζ) après avoir étudier ses branches infinies.

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α et que $\alpha\in]0,5;0,6[$

3) a) Montrer que pour tout x de $]0,5;0,6[$; $f(x)\in]0,5;0,6[$

b) Montrer que pour tout x de $]0,5;0,6[$; $|f'(x)|\le\dfrac{5}{6}$

4) Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0\in]0,5;0,6[$ et $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{5}{6}|U_n-\alpha|$

b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$; $|U_{n+1}-\alpha|\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

5) Soit n un entier naturel non nul, on pose $S_n=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{k=n}k^2U_k$ et $a_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}k^2$.

a) Montrer que $S_n-\alpha\dfrac{a_n}{n^3}=\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{k=n}k^2(U_k-\alpha)$ b) En déduire que $\left|S_n-\alpha\dfrac{a_n}{n^3}\right|\le\dfrac{5}{n}\left[1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right]$

c) Montrer que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\alpha}{3}$. (on rappelle que $a_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Exercice N° 26 : Soit (w_n) la suite définie par $\begin{cases} w_0=0 \\ w_{n+1}=\cos(w_n);\forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que l'équation $\cos x=x$ possède une solution c unique dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $c\in]0,1[$.

b) Montrer que l'équation $\cos(\cos x)=x$ possède c comme seule solution dans $\mathbb{R}$.

c)Montrer que pour tout entier naturel n , $w_n\in[0,1]$.

On veut montrer que la suite (w_n) est convergente vers c.

2) Première méthode :On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=w_{2n}$ et $v_n=w_{2n+1}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent chacune vers c. que peut-on conclure ?

3) Deuxième méthode :a) Montrer que $\forall x\in[0,1]$; $|\cos x-c|\le\sin(1)|x-1|$

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N};|w_{n+1}-c|\le\sin(1)|w_n-1|$ c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $|w_n-c|\le[\sin(1)]^n$ .Conclure.

RESUME DU COURS

Définition :Soit I un intervalle de IR et f une fonction définie sur I. on dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

Théorème :Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Définition :Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$

Théorème :Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque. Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x)=y$, si et seulement si , $f^{-1}(y)=x$. $f^{-1}\circ f(x)=x$, pour tout x de I et $f\circ f^{-1}(y)=y$, pour tout y de $f(I)$.

Théorème :Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y=x$.

Théorème :Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varié dans le même sens que f.

Théorème :Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b=f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a)\neq 0$; alors $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$

Théorème :Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. Si f est dérivable sur I et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$; pour tout y de $f(I)$.

Théorème :Soit n un entier supérieur ou égal à 2.La fonction $x\mapsto x^n$ réalise une bijection de IR_+ sur IR_+. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de IR_+ sur IR_+, appelée fonction racine $n^{ième}$.

Théorème :Pour tous réels positifs x et y , $y=x^n$, si et seulement si, $x=\sqrt[n]{y}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

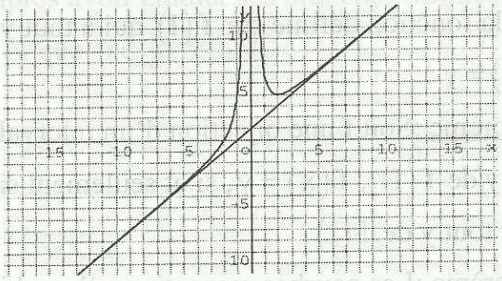
Théorème :Soit deux entiers n et p tels que $n\geq 2$ et $p\geq 2$ et deux réels positifs a et b. alors $\sqrt[n]{a^n}=a$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$; $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b\neq 0$; $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

Théorème :Pour tout entier $n\geq 2$; la fonction $f:x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$. De plus , $f'(x)=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x>0$.

Théorème :Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}\right)}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$

LES EXERCICES

Exercice 1 La courbe C_f est la représentation graphique d'une fonction. Cocher la ou (les) réponses correctes :



1) a) f réalise une bijection de $]-\infty ; 0[$ *sur* *IR*

b) f réalise une bijection de $]0 ; +\infty[$ *sur* *IR*

c) f réalise une bijection de $]0 ; 2[$ *sur* $]4 ; +\infty[$

d) la droite d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

2) a) $f^{-1}(4) = 2$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = 0$

c) f^{-1} n'est pas dérivable en 4. ; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = +\infty$

3) Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe $C_{f^{-1}}$

Exercice 2 :Répondre par Vrai ou Faux :

1)Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I)
Si f est strictement croissante sur I alors f^{-1} est strictement décroissante sur f(I)

2) f une fonction bijective sur un intervalle I .Si $f'(x_0) = 0$ avec $x_0 \in I$; alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f^{-1}(x_0)$.

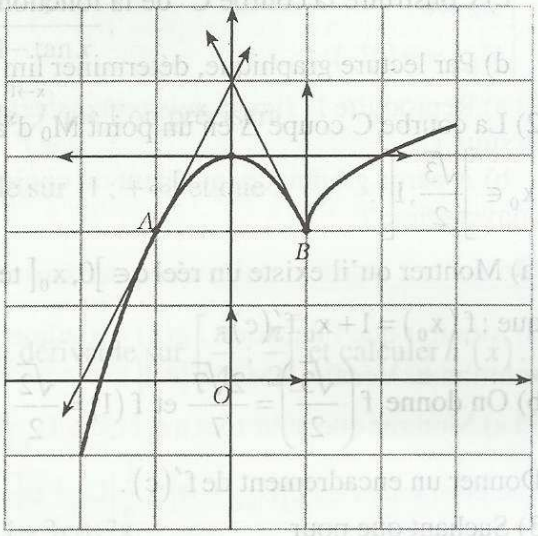
3) f une fonction bijective sur un intervalle I, f est dérivable en $x_0 \in I$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. C_f la courbe de f admet $\Delta : y = 2x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. Alors f^{-1} admet $\Delta : y = \dfrac{1}{2}x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

4) f une fonction bijective sur un intervalle I ;Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$ *Alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = 0$

5) f une fonction bijective sur $[-a , a]$. Si f est impaire alors il en est de même pour f^{-1}.

6) f une fonction bijective sur $[-a , a]$. Si f est paire alors il en est de même pour f^{-1}.

Exercice n°3 : La courbe ζ_f représenter ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur [-2 ; 3]. On sait que : f est continue sur [-2 ; 3] et dérivable sur[-2 ; 1] et [1 ; 3].



1) Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

2) Déterminer graphiquement : $f'(-1)$. En déduire : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2-1)-2}{x}$.

3) Soit g la restriction de f sur [-2 ; 0] et g^{-1} sa fonction réciproque.

a) Déterminer $g^{-1}(2)$ et $\left(g^{-1}\right)'(2)$.

b) Représenter dans la même repère la courbe de g^{-1}.

Exercice 4 : Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$; $]0\,;1]$.

1) a) Etudier f et tracer sa courbe C_f . b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1, Interpréter.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Soit $g = f^{-1}$. Montrer que g est dérivable à droite en 0. c) Tracer C_f *et* C_g.

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ $\quad \forall\ x \in [0,+\infty[$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x+1$ .on désigne par (ξ_f) sa courbe dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Montrer que, $\forall n\in\ ]1,+\infty[$ on a : $\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}-1$

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.Interpréter graphiquement le résultat.c) Vérifier que $\forall n\in\ ]1,+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

2)a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ .b) Dresser le tableau de variation de f .c) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.3)a) Justifier graphiquement que f^{-1} est dérivable à droite en 0 b) Donner le tableau de variation de f^{-1}

4)a) Calculer $f(\sqrt{5})$ .b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $3-\sqrt{5}$ et donner l'équation de la tangente à $(\xi_{f^{-1}})$ en son point d'abscisse $3-\sqrt{5}$

5)a) Montrer que $\forall x\in J$ on a $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+2x-2}{2(x-1)}$ .b) Résoudre alors l'équation $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice n°6 : Dans le graphique ci-contre, la courbe C est celle d'une fonction f définie sur [0, +∞ [, Δ est la droite d'équation y = x.

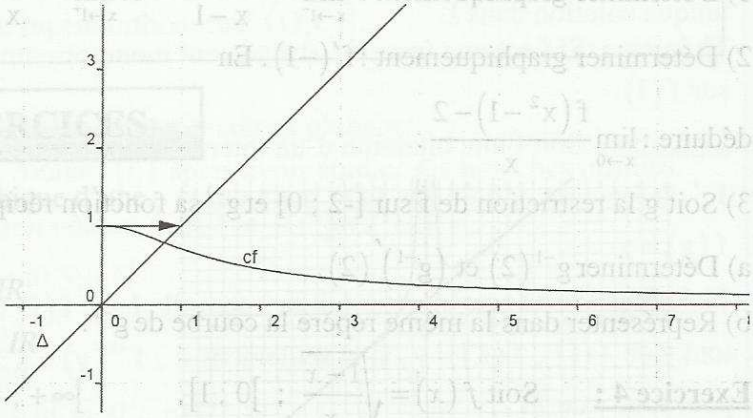
1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de [0, +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Construire la courbe C' de la fonction réciproque de f^{-1}.

d) Par lecture graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f^{-1}(x)}{x-1}$.

2) La courbe C coupe Δ en un point M_0 d'abscisse $x_0\in\left]\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right[$.



a) Montrer qu'il existe un réel $c\in\left]0,x_0\right[$ tel que : $f(x_0)=1+x_0.f'(c)$.

b) On donne $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ et $f(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donner un encadrement de $f'(c)$.

3) Sachant que pour tout $x\in[0,+\infty[, f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 7 Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$

1) Montrer que f réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

2) Montrer que $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$; $x\in[0;+\infty[$

3) On pose $h(x)=\sqrt[3]{\sin x}-1$. Montrer que h est dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et dresser son tableau de variations.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$ et g la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\dfrac{1-x}{x}-\sin x$. 1)a) Etudier les variations de g.

b) Vérifier que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K à préciser.

3)a) Soit $x\in K$, Exprimer $\sin\left(f^{-1}(x)\right)$ *et* $\cos\left(f^{-1}(x)\right)$ en fonction de x.

b) En déduire les réels $f^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ *et* $f^{-1}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

c) Calculer $f^{-1}\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right)$ $\forall\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 9 Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Soit g la fonction réciproque de f. Montrer que g est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$.

3)On pose $h(x)=g\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)\ \forall\ x\in\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ .a)Montrer que h est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.

b) En déduire que $h(x)=x-\frac{\pi}{4}\quad\forall\ x\in\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 10: Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ par : $f(x)=1+3\cos^2 x$

On désigne par (ξ_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

2)a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,4[$

c) Montrer que $\forall x\in\ ]1,4[$ on a $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$

d) Montrer que $\forall x\in\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$ on a $\frac{1}{3}<(f^{-1})'(x)<\frac{2}{3}$

3)a)Calculer $f(\frac{2\pi}{3})$ et $f(\frac{5\pi}{6})$ .b)Montrer que l'équation $f^{-1}(x)=x$ admet dans $\left]\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right[$ une seule solution α

c) Tracer (ξ_f) et $(\xi_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Montrer que $\forall x\in\left]\alpha,\frac{13}{4}\right[$ on a $\frac{1}{3}(x+2\alpha)\le f^{-1}(x)\le\frac{1}{3}(2x+\alpha)$

Exercice n°11 : **A/** Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.1) a) Etudier la parité de f.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

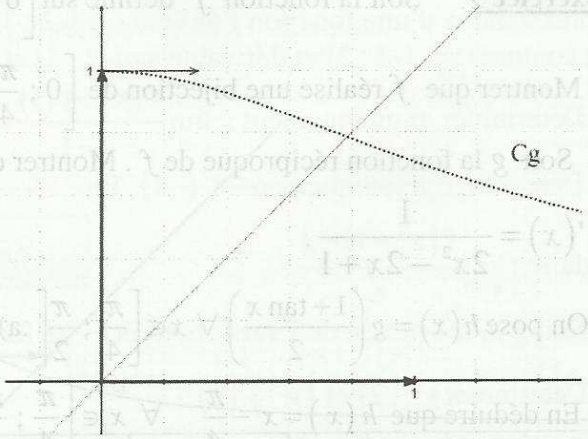
c) Etudier les variations de f sur]0 ;1]. d) Construire la courbe C.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de]0 ; 1] sur [0, +∞[.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ et tracer le courbe C' de f^{-1} dans le même repère que celui de C.

B/ Dans la figure ci-contre, on a représenté graphiquement une fonction g définie sur [0, +∞ [.On définie la suite U par

$$: \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = g(U_n); \end{cases}$$



1) a) Reproduire la figure puis représenter graphiquement la suite U.

b) À partir graphique, que peut on conjecturer pour sa convergence ?

<u>On admet pour la suite</u> que pour tout $x \geq 0, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) Montrer que l'équation : g(x) = x admet une unique solution α. Vérifier que $\alpha \in]0;1[$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$.b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c)En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$ .d) En déduire que U est convergente et préciser sa limite.

<u>Exercice 12</u> Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + 1$, On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ du plan.

1)a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $\forall\ x \in IR\ ;\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Donner une équation de la tangente (T) *à* (C) Au point I.c) Tracer (T) *et* (C).

3) a)Montrer que f réalise une bijection de IR *sur* $]0;2[$ .b) Montrer que $\forall\ x \in]0\ ;\ 2[\ ;\ f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{2x-x^2}$

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

B) Soit F la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} F(x) = f(\tan x) \ \ si\ \ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$

1) a) Montrer que F est continue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ b) Calculer $F(x)\ \ \forall\ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

2) a)Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} définie sur $[1\ ;\ 2]$

b) Montrer que F^{-1} est dérivable sur $[1\ ;\ 2]$ et déterminer sa fonction dérivée.

c) Montrer que $\forall\quad x \in [1\ ;\ 2]\quad ;\quad F^{-1}(x) + F^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

3) Soit $n\in IN^*$, On pose $U_n=\sum_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\frac{1}{n+k}+1\right)$ et $V_n=\frac{U_n}{n+1}$

a) Montrer que $\forall\ n\in IN^*\ ;\ F^{-1}\left(\frac{1}{2n}+1\right)\le F^{-1}\left(\frac{1}{n+k}+1\right)\le F^{-1}\left(\frac{1}{n}+1\right)$

b) En déduire que $(V_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculer sa limite.

c) Soit $T_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$. Déduire que $(T_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculer sa limite.

c) Soit $T_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\frac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$. Déduire que $(T_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(x)=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$.

1) a) Donner le tableau de variations de la fonction f.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $[0\ ;+\infty[$ une solution unique α tel que $\alpha\in\left]\frac{4}{5}\ ;1\right[$.

c) Construire la courbe C_f et la droite $\Delta: y=x$ dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

2) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases}U_0=\frac{45}{50}\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$; $n\in IN$

a) Montrer que $\forall$ n$\in$ IN ; $U_n\in\left]\frac{4}{5}\ ;1\right[$. b) Vérifier que $\forall\ n\in IR_+$ On a $|f'(x)|\le\frac{1}{4}$.

c) Montrer que $\forall\ n\in IR_+$ On a $|f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4}|x-\alpha|$. En déduire que $\forall$ n$\in$ IN ; $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|U_n-\alpha|$

d) En déduire que $\forall$ n$\in$ IN ; $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

3)a)Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ *sur* $]0;1]$. b Construire C_f^{-1}

c) Montrer que $\forall\ x\in\ ]0\ ;1]$ On a $f^{-1}(x)=\frac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;1[$ par $f(x)=-1+\cot\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1\ ;1[$ *sur* IR.

b) Montrer f^{-1} est dérivable sur IR et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\left[(x+1)^2+1\right]}$.

2) On pose $F(x)=f^{-1}(x-1)+f^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$ a) Montrer que F est dérivable sur IR^* et calculer $F'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in IR_+^*$; $F(x)=-1$ et pour tout $x\in IR_-^*$; $F(x)=1$.

3) Pour tout $n \in IN^*$ on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right)$ et $W_n = \frac{1}{n}U_n$.

a) Montrer que $f^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)+f^{-1}\left(\frac{-1}{k+1}\right)=-1 \quad \forall\ k \in IN^*$

b) Montrer que $\forall\ n \in IN^*$; $U_n = n - f^{-1}\left(\frac{-1}{n+1}\right)$. En déduire que (W_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice15 Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1[$ par $f(x) = \sqrt[3]{\cot\frac{\pi}{4}(1-x)}$.

1) Montrer que f est définie, contenue sur $[-1\ ;\ 1[$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$ et calculer $f'(x)$.

2) Montrer que f est bijective sur de $[-1\ ;\ 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par : $f(x) = \sqrt{\sin\frac{x}{2}}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0\ ;\ \pi]$ et calculer $f'(x)$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ;\ \pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Calculer $f^{-1}(1)$; $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

4) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

5) a) Montrer que f^{-1} n'est dérivable à gauche en 1 b) Utiliser $C_{f^{-1}}$ pour justifier que f^{-1} est dérivable en 0.

6) On pose $h(x) = f^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right) \quad \forall\ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. a) Montrer que h est contenue sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b)Montrer que h est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$ .c) Donner l'expression de $h(x)$ $\forall\ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

7) Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{3}}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = -\cos 2x$.

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle que l'on déterminera. On note par g sa fonction réciproque.

b) Montrer que g est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$ et $\forall\ x \in]-1\ ;\ 1[$; $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

2) Soit h la fonction définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $h(x) = \sin g(x)$

a) Vérifier que h est strictement monotone sur $[-1\,;1]$.b) Préciser l'image de l'intervalle $[0\,;1]$ par h.

3) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$ $\forall\, n \in IN$

a) Montrer que $0 \le U_n \le 1 \quad \forall\ n \in IN$. b) Montrer que $\forall\ x \in [-1\,;1]$; $h(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$.

c) Montrer alors que $U_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 18 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 5 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f et montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$. c) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Montrer que $\forall \in [1,+\infty[$, On a : $f'(x) \le \dfrac{3}{2}$

b) En déduire que l'équation $(E) : f(x) = 2x$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique α puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.

c) Soit $\varphi(x) = f(x) - 2x$, dresser le tableau de signe de φ sur $[1,+\infty[$.

3) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} 1 < u_0 < \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; On a : $1 < u_n < \alpha$

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(\cos x) - 5$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $g'(x) = \dfrac{-3\sin x}{\cos^2 x\sqrt{x\cos^2 x+3}}$

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,-2[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$.

5) Soit la fonction h définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} h(x) = g^{-1}(x) \text{ si } x \in]-\infty,-2] \\ h(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ si } x \in]-2,0] \end{cases}$

a)Montrer que h est continue en -2.b)Etudier la dérivabilité de h en -2. c)Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 19 I- Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ *par* : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x^2-1)-1}{x-1} & si\ \ x \in]1\,;+\infty[\\ \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}} & si\ \ x \in]0\,;1] \end{cases}$

1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2) Etudier la continuité da la fonction f sur son domaine de définition.

3) Etudier la dérivabilité da la fonction f en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Soit g la restriction da la fonction f à l'intervalle $]0\,;1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,;1]$ sur un intervalle que l'on précisera. Expliciter $g^{-1}(x)$.

5) On donne la suite U définie sur $I=\{n\in IN\ ;\ n\geq 2\}$ $par: U_n=\dfrac{n!}{2^n}$.

a)Montrer que $\forall\ n\in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1}\geq\dfrac{3}{2}U_n$

b)En déduire que la suite U est croissante et que $U_n\geq\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}\times U_2\ \forall\ n\in I$

c) Calculer la limite de la suite U lorsque n tend vers $+\infty$.

6) a) Montrer que l'équation $g(x)=U_n$ possède une unique solution $\alpha_n\in]0\,;1]\ \forall n\in I$

b)Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in I}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in I}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 20 *A*1) Soit g la fonction définie sur $D=]-\infty\ ,-2[\cup]0\ ,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}-1$.

Dresser le tableau de variations de g . En déduire le signe de $g(x)$ $\forall\ x\in D$.

1) Soient $f: x\mapsto\sqrt{x^2+2x}-x\ \ \forall\ x\in]-\infty\ ,-2]\cup[0\ ,+\infty[$.

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en (-2). Interpréter les résultats obtenus.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c)Montrer que la droite $\Delta: y=-2x-1$ est un asymptote à la courbe C_f au voisinage de $(-\infty)$.

Construire C_f . 2)Soit h la restriction de f à IR_+ .

a)Montrer que h réalise une bijection de IR_+ sur un intervalle J à préciser.

a) Expliciter $h^{-1}(x)$ $\forall\ x\in J$. Construire la courbe C' de h^{-1}.

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet $\forall\ n\in IN^*/\{1\}$ une solution unique $\alpha_n\in IR_+$

b) Montrer que la suite (α_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

b) Soit $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$. Montrer que $f(l)=0$. En déduire la valeur de l .

c) B) 1) Montrer que $\forall\ x\in[1\ ,+\infty[\ ;\ \left|f'(x)\right|\leq\dfrac{1}{5}$ .2) Soit U la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases}U_0=\dfrac{9}{10}\\ U_{n+1}=f(2U_n)\end{cases}$$

a) Montrer que $\forall\, n\in IN\ ;\ \frac{3}{5}<U_n<1$ .b) Montrer que $\forall\, n\in IN\ ;\ \left|U_{n+1}-\frac{4}{5}\right|\le\frac{2}{5}\left|U_n-\frac{4}{5}\right|$.

b)Déduire que $\forall n\in IN\ ;\ \left|U_n-\frac{4}{5}\right|\le\frac{1}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ .c)En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

C) Soit φ la fonction définie sur $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ $par: \varphi(x)=f\left(\frac{1}{\sin 2x}-1\right)+\frac{1}{\sin 2x}$.

1) Montrer que $\forall\ x\in\left]0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]\ ;\ \varphi(x)=1+\cot g\,(2x)$.

2) Montrer que φ réalise une bijection de $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ sur $K=[1\ ,\ +\infty[$.

3) Montrer que φ^{-1} est dérivable sur K et que $\forall\ x\in K\ ;\ \left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{2\left(1+(x-1)^2\right)}$

4)On pose pour $x\in K\ ;\ \psi(x)=\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(2-x)$.

a) Calculer $\psi'(x)\ \ \forall\ x\in K$. b) En déduire que $\forall\ x\in K\ ;\ \psi(x)=\frac{\pi}{2}$.

5)Soit V la suite définie sur IN^* $par: V_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}+1\right)$.

a) Donner un encadrement de V_n. b) Montrer que (V_n) est convergente et donner sa limite.

b) Soit $W_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi^{-1}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 21 I)Soit la fonction f définie sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ $par: f(x)=\sqrt[3]{\tan^2(x)}$.

1) a) Montrer que f est contenue sur $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x\in\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

b)Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé $\left(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$. On calculera $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.c)Sans calculer $f^{-1}(2)$,prouver que $f^{-1}(2)>\frac{\pi}{3}$. En déduire que $f^{-1}(2)>1$.

3)a)Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0\ ,\ +\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

b)Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0.

II- Soit $H(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-\dfrac{\pi}{4}}{x-1}$ et $H(1)=a$. 1)Déterminer le domaine de définition D_H de H

2) Déterminer le réel a pour que h soit continue sur $[0,+\infty]$

Exercice 22 Montrer que $\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^*$; $\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}}+\sqrt{b+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Exercice 23 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$; $\sqrt[n]{x+y}\le\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$

Exercice 24: Soit f la fonction définie sur $I=[0,\pi]$ par $f(x)=2(1+\cos x)$

1) Montrer que f réalise une bijection de I dans $J=[0,4]$.

2)a) Montrer que Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $f(x)=2-\dfrac{1}{n}$ admet dans I une solution unique α_n.

b) Montrer que (α_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$. Montrer que $f(\ell)=2$ .Déduire la valeur de ℓ.

3) On note $f^{-1}=g$. a) Montrer que g est dérivable sur $K=]0,4[$ et que $\forall x\in K$ on a $g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}$

b) On pose pour tout $x\in J$ $\varphi(x)=g(x)+g(4-x)$ .Montrer que φ est continue sur J et dérivable sur K

c) Calculer $\varphi'(x)$ puis déduire la valeur de $\varphi(x)$ pour tout $x\in K$.

Exercice 25: Soit f la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\sin x}$; (ζ) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ .1) Etudier f et tracer (ζ).

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur IR_+. Déterminer $g(0)$ et $g(2)$.

b) Tracer la courbe représentative (ζ') de g dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. En déduire la position de (ζ') par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$ .c) Montrer que g est dérivable sur IR_+ et que $g'(x)=\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

3) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases}U_0=2\\ \forall n\in IN; U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$ .a) Montrer que : $\forall n\in IN; 0\le U_n\le 2$

b) Montrer que (U_n) est décroissante, en déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

4) Soit (V_n) la suite définie sur IN^* par : $V_n=n\left(g\left(U_n+\dfrac{2}{n}\right)-g\left(U_n+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

a) Montrer que pour tout n de IN^* ; il existe $c_n\in\left]U_n+\dfrac{1}{n};U_n+\dfrac{2}{n}\right[$ tel que $V_n=\dfrac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$.

b) En déduire que (V_n) est convergente et donner sa limite.

RESUME DU COURS

Définition :

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$; $F'(x) = f(x)$

Théorème 1 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Théorème 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction F – G est constante sur I.

Théorème 3 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel. Alors il existe un unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Théorème 4 : Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions continues sur I une primitives de $h = \alpha f + \beta g$ est la fonction $H = \alpha F + \beta G$ avec F et G sont deux primitives respectives de f et g sur I.

Primitives des fonctions usuelles :

f	I	F
$x \mapsto a$	IR	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n$; $n \in IN^*$	IR	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$; $n \in IN/\{0;1\}$	$]0;+\infty[$ (ou $]-\infty;0[$)	$x \mapsto \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	IR	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \cos x$	IR	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	IR	$x \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	IR	$x \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x + c$

Calcul de primitives :

f	Condition	F
$u'u^n$ n entier naturel non nul		$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v + v'u$		$u.v$
$\frac{u'}{u^n}$; $n \in IN/\{0;1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$

$\frac{u'v+v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	u positive sur I	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'\sqrt[n]{u^{1-n}}$; $n\in IN/\{1\}$	u est strictement positive sur I	$n\sqrt[n]{u}$
$u'(w'\circ u)$	w une fonction dérivable sur $u(I)$	$w\circ u$

LES EXERCICES

EXERCICE 1 Indiquer la bonne réponse a ; b ou c :

1) La fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}$ est une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction g définie par : a) $g(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ b) $g(x)=\frac{3}{2}(x+1)^2\sqrt{x+1}$ c) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

2) La primitive sur $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$ de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{5x-1}}$ est :

a) $F:x\mapsto 2\sqrt{5x-1}$ b) $F:x\mapsto\sqrt{5x-1}$ c) $F:x\mapsto\frac{2}{5}\sqrt{5x-1}$

3) La primitive sur $IR/\{1\}$ qui prend la valeur -3 en 0 de la fonction $f:\frac{x^3-x^2-x+5}{(x-1)^2}$ est :

a) $x\mapsto\frac{x^3+3x}{x-1}+3$ b) $x\mapsto\frac{1}{2}x^2+x-\frac{4}{x-1}-7$ c) $x\mapsto\frac{x^3-x^2+1}{(x-1)^3}$

4) Si F et G sont deux primitives d'une fonction f définie sur IR tels que $F(1)=-2$ et $G(1)=6$:

a) $F(3)=G(3)$ b) $F(3)>G(3)$ c) $F(3)<G(3)$

5) f est une fonction contenue sur IR dont une primitive est F alors la fonction $x\mapsto F(-3x+1)$ est une primitive sur IR de la fonction : a) $f(-3x+1)$ b) $-3f(-3x+1)$ c) $-\frac{1}{3}f(-3x+1)$

6) La fonction $x\mapsto\cos^2 x+\sin^2 x$ est une primitive de la fonction :

a) $x\mapsto\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$ b) $x\mapsto 0$ c) $x\mapsto\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{3}\sin^3 x$

7) On considère une fonction f continue sur $\left[-2;\frac{3\pi}{4}\right]$ et sa courbe représentative (C) est donnée ci-contre dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$. On désigne par F une primitive de f sur $\left[-2;\frac{3\pi}{4}\right]$ et (C') sa courbe représentative.

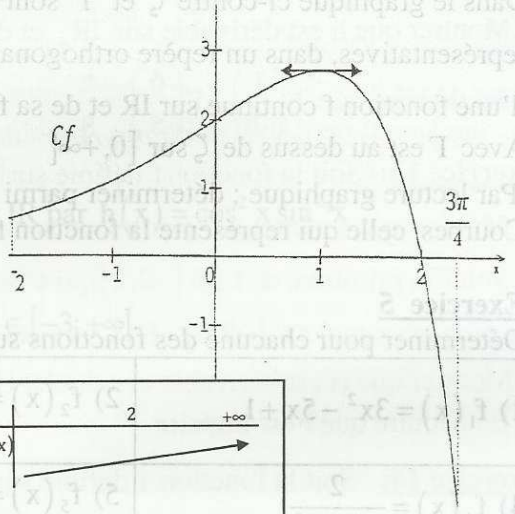
i) La tangente à la courbe (C') au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation :

a) $y=2x-1$; b) $y=-x+2$; c) $y=x-1$

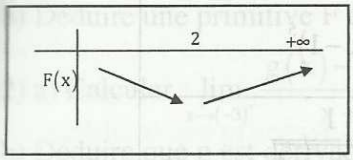
ii) La courbe (C') admet sur $\left[-2;\frac{3\pi}{4}\right]$:

a) Deux points d'inflexion ; b) Un point d'inflexion ;

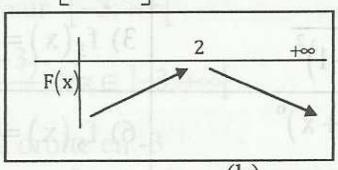
c) Aucun point d'inflexion



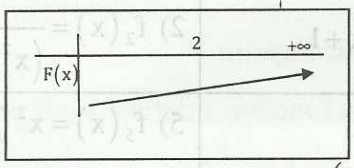
iii) Le tableau de variations de F sur $\left[-2;\frac{3\pi}{4}\right]$ est de la forme :



(a)



(b)



(c)

Exercice 2 Répond par Vrai ou Faux :

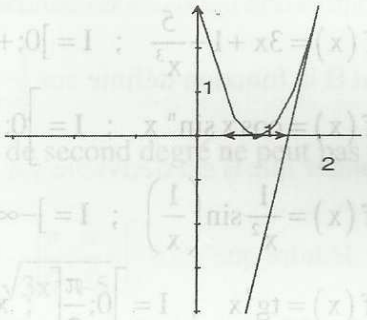
1) La fonction $x \mapsto |x+1|$ admet une primitive sur IR.

2) Deux fonctions continues sur un intervalle I ayant la même primitive sur I sont égales.

3) Si F et G sont deux primitives respectives des fonction f et g continues sur un intervalle I alors : FG est une primitive de fg sur I.

4) Soit F une primitive de f sur un intervalle I alors si f est croissante donc F est croissante sur I.

Exercice 3 La courbe ci-contre est la représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur IR. La droite Δ est sa tangente au point d'abscisse 2 avec $\Delta=(AB)$ et $A(1,-3)$ et $B(2,3)$

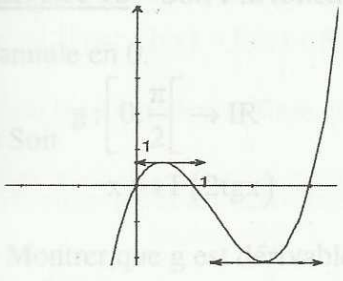


1) Par lecture graphique :

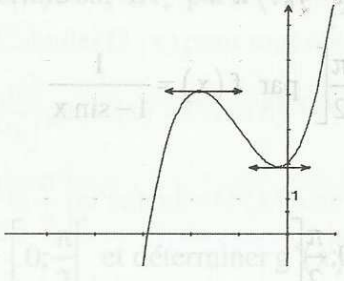
a) Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(2)$

b) Donner la tableau de variation de f .

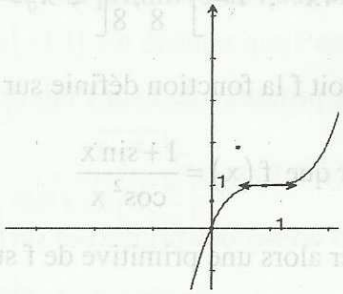
2) L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de f sur IR.



Courbe 1



courbe 2



courbe 3

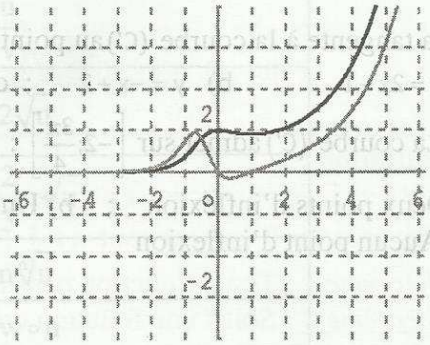
Indiquer le numéro de cette courbe en précisant les raisons de votre choix.

Exercice 4

Dans le graphique ci-contre ζ et Γ sont les courbes représentatives, dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, d'une fonction f continue sur IR et de sa fonction primitive F.

Avec Γ est au dessus de ζ sur $[0,+\infty[$

Par lecture graphique ; déterminer parmi les Courbes celle qui représente la fonction f.



Exercice 5

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes une primitive et préciser sur quel intervalle se place.

1) $f_1(x)=3x^2-5x+1$	2) $f_2(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$	3) $f_3(x)=(3x-1)^5$
4) $f_4(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$	5) $f_5(x)=x^2(1+x)^6$	6) $f_6(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{5x+4}}$
7) $f_7(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+8}}+5x+1$	8) $f_8(x)=\dfrac{x-5}{(x+1)^3}$	9) $f_9(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$

Exercice 6 Déterminer la primitive F de la fonction f prenant la valeur $y_0=F(x_0)$ lorsque $x=x_0$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=3x+1-\dfrac{5}{x^3}$; $I=]0;+\infty[$; $x_0=1$ et $y_0=-2$

2) $f(x)=\cos x\sin^n x$; $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$; $x_0=0$ et $y_0=1$ avec $n\in N$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $I=]-\infty;0[$; $x_0=-\dfrac{1}{\pi}$ et $y_0=0$

4) $f(x)=tg^2x$; $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ et $y_0=2$

5) $f(x)=tg^2 4x$; $I=\left]-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{8}\right[$; $x_0=0$ et $y_0=\pi$

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$

1) a) Montrer que $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

b) Déterminer alors une primitive de f sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

2) a) Préciser le sens de variation de F.

b) F est-elle périodique ?

Exercice 8 Soient f et g deux fonctions définies sur IR par : $f(x)=8\cos^4 x$ et $g(x)=8\sin^4 x$

1) a) Montrer que $f(x)=\cos 4x+4\cos 2x+3$.

b) Donner une primitive F de f sur IR.

2) Déterminer une primitive G de g sur IR.

3) a) Montrer que $\forall x\in IR$; $f(x)+g(x)=8-16\cos^2 x\sin^2 x$

b) En déduire une primitive H sur IR de la fonction h définie sur IR par $h(x)=\cos^2 x\sin^2 x$

Exercice 9 $\forall x\in[-3;+\infty[$ On pose : $f(x)=\sqrt{x+3}$

1) a) Calculer la dérivé de la fonction $g:x\mapsto(x+3)\sqrt{x+3}$ $\forall x\in[-3;+\infty[$

b) Déduire une primitive F de f sur $[-3;+\infty[$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{g(x)-g(-3)}{x+3}$ $\forall x\in]-3;+\infty[$

b) Déduire que g est dérivable à droite en -3

3) En déduire une primitive de f sur $[-3;+\infty[$

Exercice 10 Soit f une fonction continue sur $[-\alpha;\alpha]$ avec $\alpha>0$

1) Montrer que si f est impaire alors les primitives de f sur $[-\alpha;\alpha]$ sont paires.

2) a) Montrer que si f est paire alors la primitives F de f sur est telle que $F(0)=0$ est impaire.

b) Répond par Vrai ou Faux : toute primitive d'une fonction paire est impaire.

Exercice 11 Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{6x^2+5}{\sqrt{3x^2+5}}$.

1) Montrer que f admet des primitives sur IR.

2) Montrer qu'une fonction de type $x\mapsto\sqrt{P(x)}$ avec P est un polynôme de second degré ne peut pas être une primitive de f sur IR.

3) Soit h une fonction dérivable sur IR.

a) Déterminer la dérivé de la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x)=h(x)\sqrt{3x^2+5}$

b) En déduire une primitive de f sur IR.

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur IR_+ par $f(t)=\dfrac{1}{t^2+4}$ et F la primitive de f sur IR_+ qui s'annule en 0.

1) Soit $g:\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\to IR$, $x\mapsto F(2tgx)$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $g'(x)$.

b) En déduire que $\forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ On a : $g(x)=\dfrac{x}{2}$ puis calculer $F(2\sqrt{3})$

2) $\forall x \in IR_+$ On pose : $h(x) = F\left(\frac{2}{x+1}\right) + F\left(\frac{2x}{x+2}\right)$

a) Montrer que h est dérivable sur IR_+ et déterminer $h'(x)$

b) En déduire que $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\pi}{8}$

Exercice 13: Soit la fonction f définie sur $[-2,2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

1) Montrer que f admet des primitives sur $[-2,2]$

2) Soit F la primitive de f sur $[-2,2]$ qui s'annule en 0

On pose pour tout $x \in [-2,2]$; $H(x) = F(x) + F(-x)$

a) Montrer que H est dérivable et calculer $H'(x)$ puis calculer $H(x)$

b) En déduire que F est impaire

Exercice 14: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

1) Montrer que la droite $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie de (ζ_f)

2) Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2 et (Γ) sa courbe

On désigne par G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = F(4-x) + F(x)$

a)Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = 0$

b) Montrer que $I(2,0)$ est un centre de symétrie de (Γ)

3) Soit H la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = F(2 + \tan x)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$ puis calculer $F(1)$

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par : $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x-2}$

1) Existe-t-il un polynôme P tel que la fonction définie par $F(x) = P(x)\sqrt{x-2}$ est une primitive de f sur $]2;+\infty[$?

2) F est-elle une primitive de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$?

Exercice16 : Soit $f : x \to \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1) Montrer que f admet des primitives sur $[1,+\infty[$.

2) Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1 et G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $G(x)=\tan x-x$

c) Calculer $F\left(\sqrt{2}\right)$ et $F(2)$.3) Soit $h:x\to\frac{1}{f(x)}$; $x\in]1,+\infty[$ .Déterminer la primitive H de h sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{3}$.

Exercice17 : Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $f(x)=x\cos^2 x$

1) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\cos 2x$

2) Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.

3)a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

b) En déduire la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

4) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g:x\to x\sin^2 x$.

Exercice18 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1[$ on pose $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}k.x^{k-1}$

1)a) Montrer que f_n admet au moins une primitive

b) Déterminer la primitive F_n de f_n sur $[0,1[$ qui s'annule en 0.

2) En déduire une autre expression de $f_n(x)$.2)

Soit $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et $U_n=\frac{1}{n^2}(1+2\tan\alpha+3\tan^2\alpha+.....+n\tan^{n-1}\alpha)$; $n\in\mathbb{N}^*$ Déduire de ce qui procède que U converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice19 : 1) Linéariser les expression: $\sin^4 x$ et $\cos^4 x$

2) Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\mapsto 3\sin^4-5\cos^4 x$

3) Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $x_0=\frac{\pi}{2}$

Exercice20 : Soit la fonction f définie $[-1,1]$ par $f(x)=x^2-\sqrt{1-x^2}$

1)a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-1,1]$

b) Soit F la primitive de f sur $[-1,1]$ telle que $F(0)=0$; G la fonction définie sur $[-1,1]$ par $G(x)=F(x)+F(-x)$ Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1,1]$.En déduire que F est impaire.

2) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $H(x)=F(\cos x)-F(\sin x)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $H(x)=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{3}\sin^3 x$

c) Calculer F(1)

RESUME DU COURS

Théorème :Soit f une fonction continue sur un intervalle I. si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$

Définition : Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $F(b)-F(a)$. Le réel $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté : $\int_a^b f(x)dx$

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b et c des réels de I. alors

$\int_a^a f(x)dx=0$; $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ (Relation de Chasles)

Définition :Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $F(b)-F(a)$. le réel: $\int_a^b |f(x)|dx$.

Théorème : Soit f et g deux fonctions continue sur $[a;b]$. Pour tous réels α et β ;

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

Théorème :Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

Théorème :Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ où $a<b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx>0$

Théorème :Soit f et g et h trois fonctions continue sur $[a;b]$.SI $h\leq f\leq g$; alors

$$\int_a^b h(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

Théorème :Si f une fonction continue sur $[a;b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx\,\mu$

Définition : Le plan est muni d'un repère orthogonal . Soit f et g deux fonctions continue sur $[a;b]$. L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

Théorème :Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ et telle que leurs dérivées f ' et g ' sont continues sur $[a;b]$. Alors $\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$

Définition :Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ $(a<b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel, noté $\bar{f}$ défini par $\bar{f} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique de la valeur moyenne : Le plan est muni d'un repère orthogonal . Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ et $y=0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\bar{f}$.

Théorème :Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Soit m et M deux réels. Si pour tout x de $[a;b]$, $m \le f(x) \le M$ alors $m \le \bar{f} \le M$

Théorème :Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ $(a<b)$. Il existe $c \in [a;b]$, tel que $\bar{f} = f(c)$

Théorème :Le plan est muni d'un repère orthogonal . Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB} = \{M(x;y)$ tels que : $y=f(x)$ et $a \le x \le b\}$ autour de l'axe $(O;\vec{i})$ est le réel $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

Théorème :Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. alors la fonction F définie sur I par est la primitive de f qui s'annule an a.

.théorème :Soit f une fonc $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tion continue sur un intervalle I et a un réel de I. alors la fonction

$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$. Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = f(u(x)).u'(x)$, pour tout x de J.

Théorème :Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Théorème : Soit f une fonction continue sur IR , périodique de période T. pour tout réel a

LES EXERCICES

Exercice 1 L'une des réponses proposées est correcte, laquelle ?

1) Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors on a :

a) $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ b) $\int_a^b |f(t)|dt \geq 0$ c) $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \geq 0$

2) $\int_{-1}^{1} (\sin x)^{101} dx$ est égal à : a) 0 b) 101 c) -101.

3) $I = \int_{-2}^{1} x^{2n+1}\sqrt{x+2}\,dx$, alors : a) $I > 0$, c) $I<0$, d) On ne peut rien dire sur le signe de I.

a) $I > 0$ b) $I = 0$ c) $I<0$ d) On ne peut rien dire sur le signe de I

4) Soit f une fonction continue sur [1,5] et $1 \leq f(t) \leq 10$, $I = \int_1^5 f(t)dt$, alors :

a) $1 \leq I \leq 5$ b) $5 \leq I \leq 50$ c) $4 \leq I \leq 40$.

5) La dérivée de la fonction $x \mapsto \int_{x^2}^{-x} f(t)dt$ avec f une fonction continue sur IR est :

a) $f(-x) - f(x^2)$ b) $-f(-x) - 2xf(x^2)$ c) $-xf(-x) - x^2 f(x^2)$

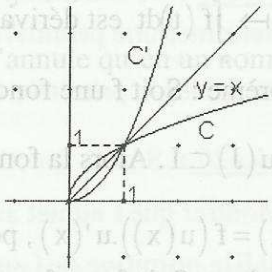
6) $\forall x > 0$; Soit $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ b) $f(x) \leq \frac{1-\cos x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

7) Soit α un réel strictement positif alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{t^2 + t^6 + \sin t}{1+t^4} dt$ est égale à :

a) $\frac{2}{3}\alpha^3$ b) $\frac{1}{3}\alpha^3$ c) $\frac{3}{2}\alpha^3$

8) ζ et ζ' désignent les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on note A l'aire de la région du plan limitée par ζ et ζ' et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, alors A =



a) $2\int_0^1 f(x)dx$ b) $1 - 2\left(\int_0^1 f^{-1}(x)dx\right)$ c) $\int_0^1 (x - f(x))dx$ d) $\int_0^1 (f^{-1}(x) - f(x))dx$

9) Soit f une fonction continue et impaire sur $[-1;1]$ alors $\int_{-1}^{1} (f(x)+1)dx =$

a) 2 ; b) 0 ; c) -2

10) soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{4}{2+t^2} dt$ alors

a) $f(x) > 0 \quad \forall x \in IR$; b) $f(x) < 0 \quad \forall x \in IR$ c) f(x) change le signe sur IR

Exercice N° 2 : Vrai ou Faux.

1) Soit U_n la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2) Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\left|\int_0^x \sqrt[5]{t^2+4}\sin t\,dt\right| \leq \int_0^x \sqrt[5]{t^2+4}\,dt$

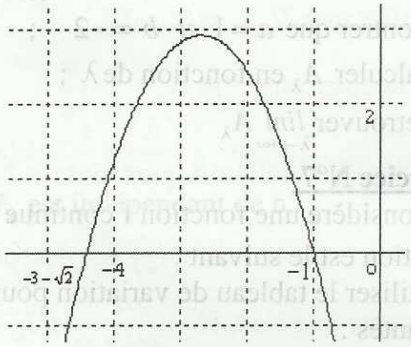
3) Pour tout réel α, on a : $\int_{-\alpha}^{\alpha} t^2 \sin t\,dt = 0$.

4) Si l'intégrale d'une fonction continue f est nulle sur l'intervalle [a,b], alors la fonction f est nulle sur [a,b].

5) Soit f une fonction continue, croissante sur [a,b] et f(a) = c et f(b) = d, alors $\int_c^d \left|f^{-1}(t)\right|dt$ est égal à l'aire de la partie du plan limitée par ζ_f et les droites d'équations y= a, y = b et x = 0.

6) Si f et g deux fonctions continues sur IR, alors $\forall x \in IR$; $\int_0^x f(t)g(t)dt = \left[\int_0^x f(t)dt\right]\left[\int_0^x g(t)dt\right]$

7) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f, elle coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-3-\sqrt{2}$ et -1 alors $\int_{-3-\sqrt{2}}^{-1} f'(t)dt \geq 2$



Exercice 3 Calculer chacune des intégrales suivantes :

$A = \int_0^3 |x^2 - 2x|\,dx$, $B = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}}dx$, $C = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$,

$D = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$, $E = \int_0^{\pi} \sin^6 x\,dx$, $F = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} x\tan^2 x^2\,dx$.

Exercice 4 Calculer : $A = \int_0^3 \frac{h}{\sqrt{1+h}}dh$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$.

Exercice 5 On pose $A = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$, $B = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$, $C = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx$.

1) Vérifier que B + C = A

2) Calculer A et B puis C.

Exercice 6 : La courbe ζ_f ci-dessous représente une fonction f définie sur IR dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'asymptotes $y = x+2$ et $y = x-2$.

I) En utilisant le graphique :

1) Déterminer le tableau de variation de f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

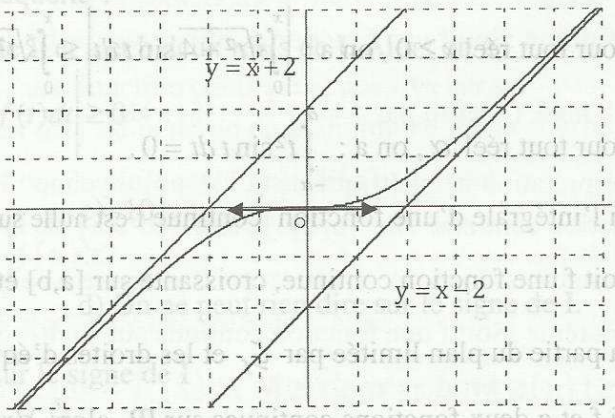
3) f^{-1} est-elle dérivable en 0. Expliquer.

4) Soit $\lambda\in\ ]0;+\infty[$ *et* A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ *et* $x=\lambda$

a) Vérifier que $x-2\le f(x)\le x+2$;

b) En déduire que : $\dfrac{\lambda^2}{2}-2\lambda\le A_\lambda\le\dfrac{\lambda^2}{2}+2\lambda$

c) En déduire $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.



II) La courbe ζ_f ci-contre représente la fonction f définie sur IR par $f(x)=ax+\dfrac{bx}{\sqrt{x^2+4}}$

1) Montrer que $a=1$ *et* $b=-2$;

2) Calculer A_λ en fonction de λ ;

3) Retrouver $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$

Exercice N°7

On considère une fonction f continue sur IR_+ dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		+∞
f'(x)	0	−	0	+	
f(x)	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1) Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :

a) Trouver un encadrement de f sur IR_+

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{f(x)-1}$.

2) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0;1]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

3) Soit g la fonction définie sur IR_+ par : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

a) Dresser le tableau de variation de g ; b) Construire la courbe (C)

4) On note par $I=\int_0^1 g(x)dx$; $J=\int_0^1 xg'(x)dx$

a) Donner une interprétation graphique de I ; b) Montrer que $1\le I\le2$

c) Calculer I + J ; d) En déduire que : $0\le J\le1$

Exercice 8 : Pour tout entier naturel n, On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$.

1) Montrer que $I_0 = \frac{2}{3}$

2) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout n de IN, on a : $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire $\lim_{n\to+\infty}(I_n)$.

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n de IN, on a $(2n+5)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$

b) En déduire la valeur de I_1

c) Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 (x+1)^2 \sqrt{1-x}\, dx$

Exercice 9 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\pi}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*\ U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

1) Calculer U_1 *et* U_2 .

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$ (1)

3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4) Démontrer à l'aide de (1) que pour tout entier naturel n, $(n+1)U_{n+1}U_n$ est indépendant de n.

5) Exprimer U_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 10 Soit la fonction $f : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\to [1, +\infty[\ , x \mapsto \frac{1}{\sin x}$.

1) a) Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2) Déduire alors la valeur de l'intégrale $J = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$.

Exercice 11: Soit F la primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction $f(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ telle que $F(\sqrt{2}) = 0$

1) Montrer que F est décroissante sur $]1;+\infty[$

2) Soit G la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$; $G(x) = x - \frac{\pi}{4}$

c) Calculer alors l'intégrale $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1)a) Justifier l'existence de U_n .

b) Montrer que U_n est décroissante.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

Montrer que U_n est convergente et déterminer sa limite.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \le U_n \le \frac{1}{n+1}$; retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1}$.

a) vérifier que $U_{4n+2} = U_2 - W_n$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Exercice13 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$.

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Déduire qu'elle est convergente.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx$

b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} \le (n+1) I_n \le \frac{1}{4} + \frac{2}{n+2}$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) I_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n I_n$.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_k$ *et* $I = \int_0^1 \frac{-x}{(x+1)^3} dx$.

a) Montrer que $I = \frac{-1}{8}$

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\forall x \in [0,1] : \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k = \frac{-x}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

En déduire que $S_n - I = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} dx$

c) Montrer, alors, que $|S_n - I| \le I_{n+1}$. En déduire que (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 14 Pour tout entier naturel n, on définit l'application F_n de $[0,2[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{4-t^2}}dt$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $F_{n+1}(x)=-x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}+2(n+1)\int_0^x t^{2n+1}\sqrt{4-t^2}\,dt$.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , F_n a pour limite L_n lorsque x tend vers 2 avec $L_n=2\frac{16^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 15 Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^3}$.

1) Etudier f et tracer ζ_f dans le plan rapporté à RON $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit $\lambda>0$ *et* $A(\lambda)$ l'aire (en U A) du domaine limité par ζ_f , $(O,\vec{i})$ et x = λ.

Calculer $A(\lambda)$. Déterminer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

3) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\forall k\in\{0,1,...,n-1\}:\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) On pose $U_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, montrer que $\forall n\ge1$, on a : $A(1)\le U_n\le A(1)+\frac{13}{8n}$

c) En déduire que U converge et déterminer sa limite.

Exercice 16 Soit n∈ IN et $U_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN$; $0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$; b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

2) Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout n∈ IN On a : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}U_n$

3) Soit $x\in IR$ *et* $\phi(t)=\int_0^{\cos t}\sqrt{1-x^2}dx$

a) Montrer que ϕ est dérivable sur IR ; b) Calculer $\phi'(t)$

c) En déduire $\phi(t)$ pour $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer alors U_n

4) a) Montrer que pour tout n∈ IN, On a : $\frac{n+1}{n+4}\le\frac{U_{n+1}}{U_n}\le1$; b) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$

c) Montrer que pour tout n∈ IN, On a : $U_n\times U_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$

d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\,U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Exercice 17 Soit F la fonction définie par : F : $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \int_0^{2\sin x} \sqrt{4-t^2}\,dt$.

1)a) Montrer que F est définie sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer F(0).

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout réel x de $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x) = 4\cos^2 x$.

c) En déduire l'expression de F sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la courbe T d'équation cartésienne $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

a) Tracer T

b) Utiliser ce qui précède pour calculer l'aire A de la région du plan limitée par la courbe T et les droites d'équations respectives x= 0 et x = 2.

Exercice 18 Pour tout x$\in \mathbb{R}_+$, on pose f(x)= $\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

1) a)Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(x)$.

b) En déduire que f admet un maximum en $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

2)a) Montrer que pour $x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}} \le f(x) \le \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) On pose $h(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ pour tout $t \ge 0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $S_n = \sum_{k=n}^{2n} h(k)$.

a) Vérifier que pour $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$, $h(k+1+n) \le \int_{k+n}^{k+1+n} h(t)dt \le h(k+n)$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)+h(2n) \le S_n \le f(n)+h(n)$

c) Montrer que S_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 19 Pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \tan^2 x$.

1)a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C et C' de f et f^{-1} (unité 2 cm).

2) Soit l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$, interpréter graphiquement I.

Calculer I puis en déduire la valeur de $J=\int_0^1 f^{-1}(x)dx$.

3) Soit A le domaine limité par C, $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations x = 0, $x=\frac{\pi}{4}$.

S étant le solide de révolution obtenu par rotation de A autour de $(O,\vec{i})$. Montrer que

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{1}{3}$. En déduire le volume de S.

Exercice 20 Soit f la fonction définie sur $I=[0,1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

On note C la courbe de f dans RON $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm)

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $\forall x\in]0,1[: f'(x)=\frac{1}{2(1-x)\sqrt{x-x^2}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe C' de f^{-1}.

c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

3) Soit A la mesure de l'aire du domaine D du plan limité par la courbe C et les droites d'équations respectives : x = 0 et y = 1. Montrer que $A=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

4) On considère la fonction F définie sur $]-\pi,\pi[$ par $F(x)=\int_0^{tg\frac{x}{2}} \frac{1}{1+t^2}dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et calculer F'(x).

b) Déduire que $\forall x\in]-\pi,\pi[, F(x)=\frac{x}{2}$ puis calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

c) Déduire la valeur de A.

Exercice 21 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si x > 0 et $g(0)=f(0)$.

1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)\ \forall x>0$

3) Déterminer g dans le cas où $f(x)=\cos^2(\pi x)$.

Exercice 22 1) On pose $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$ et $f(t)=\frac{\sin t}{t}\ \forall t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

a) Prouver l'existence de I et en donner une interprétation géométrique.

b) Montrer que $\frac{1}{\pi}\le I\le\frac{2}{\pi}$.

2) Soient les fonctions F et G définies par : $\begin{cases}F(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt\ \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\\ G(x)=\int_{0}^{x}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt\ \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\end{cases}$

a) Montrer que $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]: G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$.

b) En déduire , alors , que $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt$.

3) Soit U la suite définie , sur $\mathbb{N}$, par : $U_0=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\sin\pi t\,dt$ et $\forall n\ge1, U_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^n\sin\pi t\,dt$.

a) Calculer U_0 et U_1

b) Etablir que $\forall n\in\mathbb{N}: U_n=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)U_{n-2}\right]$. En déduire la valeur de U_3

4) On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}U_k$ et $J_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}dt$; $n\ge1$.

a) Montrer que $\forall n\ge1: I-S_n=J_n$.

b) Etablir que $\forall n\ge1:\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}\le2t^n$; en déduire que $J_n\le\frac{1}{n+1}$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty}J_n$. En déduire que S_n converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 23 1) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $\sin x=\int_{0}^{x}\cos t\,dt$ et $\cos x=1-\int_{0}^{x}\sin t\,dt$.

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : a) $\sin x\le x$ et $\cos x\ge1-\frac{x^2}{2}$

b) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$ *et* $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

3) Calculer alors $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Exercice 24: On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$

) Etudier la monotonie de (I_n)

2)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$

) Montrer que la suite (I_n) converge vers une limite que l'on déterminera

3)a) Calculer I_0 et I_1 .b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)}{4} I_n$ 0c) En déduire I_3 et I_4 .

Exercice 25 A/ Soit la fonction $f : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}; x \mapsto \tan x$ et la fonction g définie par $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et que g est impaire.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.

3) Soit h = gof. Montrer que h est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

4) En déduire que $g = f^{-1}$. Calculer $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

B/ On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_{n+1} *et* I_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = 2^n \frac{n!}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n+1)}$.

C/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1; u_1 = 1 + \frac{1!}{1\times 3}$ et plus généralement pour tout n de $\mathbb{N}$,

$u_n = 1 + \frac{1!}{1\times 3} + \frac{2!}{1\times 3\times 5} + \ldots + \frac{n!}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n+1)}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} dt$.

2) On pose $v_n = 2I - u_n$ *où* $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

a) Exprimer v_n à l'aide d'une intégration par parties.

b) Vérifier que : $\forall t \in [0,1]; 0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 26 On pose $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ \forall\ x\in\ ]-2,2[$. On note C sa courbe.

1)a) Etudier f et tracer C dans un RON $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

b) On désigne par A l'aire de la partie limitée par C , $\left(O,\vec{i}\right)$ et les droites d'équations x = 1 et x = -1.

Montrer que $A = 2\int_0^1 f(x)dx$.

2) Soit F la fonction définie sur $]-2,2[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Montrer que F est impaire.(On note Γ la courbe de F)

3) $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $G(x)=\int_0^{2\sin x} f(t)dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer G'(x).

b) En déduire que $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[, G(x)=2x-\sin 2x$ c) Déduire de ce qui précède la valeur de A.

4) a) Vérifier que la fonction $t\mapsto 2\sin t$ réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. En déduire, alors, $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de F puis donner l'allure de Γ dans un RON $\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 27 Soit F la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\sqrt{\tan x}} \dfrac{t}{1+t^4}dt$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer F'(x).

b) Calculer F(0). Exprimer alors F(x) en fonction de x pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_0^1 \dfrac{t}{1+t^4}dt$

2) a) Vérifier que : $\forall t\in\mathbb{R}, \dfrac{t}{1+t^4}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k+1}+(-1)^{n+1}\dfrac{t^{4n+5}}{1+t^4}\ (n\in\mathbb{N})$.

b) En déduire que : $\int_0^1 \dfrac{t}{1+t^4}\,dt = u_n+v_n$ avec $u_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{4k+2}$ et $v_n=(-1)^{n+1}\int_0^1 \dfrac{t^{4n+5}}{1+t^4}dt$.

3) a) Vérifier que : $\forall t\in\mathbb{R}_+$ et $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{t^{4n+5}}{1+t^4}\le t^{4n+5}$. En déduire que $|v_n|\le\dfrac{1}{4n+6}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

RESUME DU COURS

Théorème et définition :Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1) l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensembles des nombres réels $\mathbb{R}$.

2) il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.

3) l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

4) tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = ai + b$, où a et b sont des réels.

Théorème :Soit $z = ai + b$ et $z' = a' + ib' \ (a\ ,\ b\ ,\ a'\ ,\ b')$ sont des réels. Alors :

- $z = z' \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$
- $z = 0 \Rightarrow a = b = 0$
- z est réel $\Rightarrow b = 0$
- z est imaginaire $\Rightarrow a = 0$

Propriétés :Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tous nombres complexes z et tous nombres complexes z' non nul ,

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{(\overline{z'})^n}$; $n \in \mathbb{Z}$

$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

$z = \overline{z}$, si et seulement si z est réel

$z = -\overline{z}$, si et seulement si z est imaginaire

Théorème :Soit $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ deux vecteurs tels que $\vec{w_1}$ est non nul. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ est réel.

Théorème : Soit $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ deux vecteurs tels que $\vec{w_1}$ est non nul. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ est imaginaire.

théorème :Soit deux nombres complexes z et z'. $|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;

$|kz| = |k||z|$; $k \in \mathbb{R}$; $|zz'| \leq |z||z'|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z^n| = |z|^n$; $n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, z \neq 0$;

$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, z \neq 0$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}, z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

Propriétés :Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$;

$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)[2\pi]$; si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Théorème :Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ Alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z.

Si M est l'image de z dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \theta[2\pi]$

Théorème :Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$; a et $b \in \mathbb{R}$ Alors $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$, si et seulement si, $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Propriétés :Soit deux nombres complexes non nul z et z'.

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$; $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$;

$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi], n \in \mathbb{Z}$. Pour tout nombre complexe non nul z , $z^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)$, la formule précédente est appelée formule de Moivre.

Théorème :Le plan est muni d' un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A , B , C et D les points d'affixes respectives tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Alors

$\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Théorème : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta[2\pi]$

Théorème : Pour tout réel θ , On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$

Théorème : $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i\pi} = -1$. Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$. Pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$; $e^{\overline{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Propriétés :Soit deux réels θ et θ' , $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Théorème :Tout nombre complexes non nul z, s'écrit sous la forme : $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ est appelée écriture exponentielle de z.

Théorème :Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_K = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; l'entier $k \in \{0;1;.....;(n-1)\}$. Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées les racines $n^{ièmes}$ de l'unité.

Théorème :Le plan est muni d' un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Lorsque $n \geq 3$; les points images des racines $n^{ièmes}$ de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème :Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul. l'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_K = re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ l'entier $k \in \{0;1;.....;(n-1)\}$, où r

est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$. Ces solutions sont appelées les racines $n^{ièmes}$ de nombre complexe a.

Théorème :Le plan est muni d' un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Lorsque $n \geq 3$; les points images des racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexes non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r^n = |a|$.

Théorème :Soit a , b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Théorème :Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$; alors

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$; $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

Théorème :Soit $a_1; a_2; .....; a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0, n \geq 2$. Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$; Si z_0 est un zéro de P , alors $P(z) = (z - z_0) g(z)$, où $g(z)$ est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$ avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Théorème :Pour tout réel x et tout entier n. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ (Formule de Moivre) .

Pour tout réel x, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ (Formule d'Euler)

Théorème :En transformant une expression contenant une puissance de $\cos x$ ou de $\sin x$ sous une forme qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires, on dit qu'on a linéarisé l'expression donnée.

LES EXERCICES

Exercice 1 Une seule des réponses suivantes est exacte. Laquelle ?

1) Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{3\pi}{4}$ alors la forme algébrique de z est

a) $1+i$; b) $-1+i$; c) $1-i$

2) Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C et z_D une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ est :

a) $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)$; b) $\dfrac{\arg(z_D - z_C)}{\arg(z_B - z_A)}$;c) $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

3) A tout nombre complexe $z \neq -3$ on associe le nombre complexe z' définie par : $z' = \dfrac{\bar{z} - 2i}{z + 3}$, l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est :

a) un cercle de rayon 1; b) une droite ; c) une droite privée d'un point; d) un cercle privé d'un point

4)A tout nombre complexe $z \neq -3$ on associe le nombre complexe z' définie par : $z' = \dfrac{z-3}{z+3}$, l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est un imaginaire est :

a) un cercle ; b) une droite; c) une droite privée d'un point ; d) un cercle privé d'un point

5) A, B et C sont des points distincts d'affixes respectives a, b et c telles que $(b-a) = 2i(c-a)$ alors

a) ABC est un triangle isocèle en A ; b) $(AB) \perp (AC)$; c) $(AB) // (AC)$

6) On considère les nombres complexes : $z = 1 + i\sqrt{3}$; $z' = 2 - 2i$ et $z'' = \dfrac{z}{z'}$, alors la forme exponentielle du nombre z'' est : a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{12}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{12}}$

7) Soit $z = -8 + 6i$ alors une racine carrée de z est : a) $1 + 3i$ b) $1 - 3i$ c) $-1 + 3i$

8) Les images des racines quaterièmes de $-1 + 7i$ sont :

a) un cercle trigonométrique b) alignés c) symétriques 2 à 2 par rapport à l'origine

9) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2mz - 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1;1\}$; on désigne par z' et z'' les solutions de (E) alors :

a) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0[2\pi]$ b) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \pi[2\pi]$ c) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \arg(m)[2\pi]$

10) Pour tout réel θ ; l'équation $(E) : iz^2 + e^{i\theta}z + 2 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions z_1 et z_2 ; on a donc :

a) $z_1 + z_2 = ie^{i\theta}$ b) $z_1 + z_2 = e^{i\theta}$ c) $z_1 z_2 = ie^{i\theta}$

11) L'ensemble des points M d'affixe $z = 1 + 2e^{3i\theta}$ avec $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ est :

a) un cercle b) un segment de droite c) un demi cercle

12) Par quoi doit–on compléter les pointilles pour que les deux assertions suivantes soient vraies : $z \in \mathbb{C}$; $z = -\bar{z}$.....$z \in i\mathbb{R}$; $z \in \mathbb{C}$, $z^3 = -1$.....$z = -1$:

a) $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$; b) $\Leftrightarrow$ et $\Leftrightarrow$; c) $\Leftarrow$ et $\Leftrightarrow$

13) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls ; M_1 et M_2 deux points d'affixes respectifs z_1 et z_2. Si $\arg(\overline{z_1}) + \arg(-iz_2) \equiv \arg(3i)[2\pi]$, alors

a) le triangle OM_1M_2 est rectangle en O b) M_1 est le symétrique de M_2 par rapport à O

c) O est un point de segment $[M_1M_2] / \{M_1, M_2\}$

Exercice 2 Pour chacune des questions suivantes, il y a deux conclusions correctes, vous devez donner au plus deux réponses (celles que vous jugez correctes) :

1) Soit $z = x + iy$; $x \in IR$ et $y \in IR$, si z est imaginaire pur, alors :

a) $\|z\|^2 = y^2$	b) $\|z\|^2 = -y^2$	c) $\|z\|^2 = -z^2$	d) $\|z\|^2 = x^2$

2) Soit $z = \sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$; $\theta \in [-\pi, 0[$ alors :

a) $\|z\|^2 = \sin\frac{\theta}{2}$	b) $\arg(z) \equiv \pi + \frac{\theta}{2}[2\pi]$
c) $\arg(z) \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]$	d) $\|z\| = -\sin\frac{\theta}{2}$

3) Soit $n \in IN^*$ et $\theta \in IR$ et $z = e^{i\theta}$ alors $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égale :

a) $e^{in\theta}$	b) $\cos(\theta^n) + i\sin(\theta^n)$
c) $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	d) $(\cos\theta)^n + i(\sin\theta)^n$

4) Soit A, B et C sont des points d'affixes respectifs a, b et c telles que $\frac{(b-a)}{(c-a)} = i\sqrt{3}$ alors :

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$	b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$	c) $AC = BC$	d) $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = CA^2$

Exercice 3 Répondre par vrai ou faux :

1) Soit $z = re^{i\theta}$; $r \in IR^*$ et $\theta \in IR$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2iz + i = 0$ si z' et z'' sont ses solutions alors $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) Soit z un nombre complexe ; $z^4 = 256 \Leftrightarrow z = 4$ ou $z = -4$.

4) Soit les points $M(z); M'(z'); A(2); z \neq 2$ et $z' \neq 2$ si $\arg(z-2) \equiv \arg(z'-2)[2\pi]$ alors A, M et M' sont alignés.

5) On considère dans C l'équation $(E) : z^n = i(z+2)^n$; $n \in IN$ alors les images des solutions de (E) appartiennent à une droite fixe.

Exercice 4 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan, soit z un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan d'affixe z tel que $|z-1| = |z-i|$

2) On considère dans C l'équation $(E) : (z-1)^n = -i(z-i)^n$; $n \in IN$. Montrer que les images des solutions de (E) appartiennent à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 5 Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne le point $A(i)$, soit l'application $f : P \to P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = (1-i)z - 1$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = \sqrt{2}$.

2) Soit M un point distinct de A et $M' = f(M)$.

a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle et isocèle en M.

b) Déterminer une mesure orientée de l'angle $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)$.

c) En déduire une construction de point $M' = f(M)$.

Exercice 6 Soit $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ un repère orthogonal du plan complexe P . on donne les points $A(i)$ et $B(-i)$ et f l'application de $P/\{A\}$ vers P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{i\bar{z}+1}{z+i}$.

1) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

3) a) Montrer que $\forall\ M \in P/\{A,B\}\ ;\ \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$

b) En déduire que si M appartient au cercle de diamètre $[AB]/\{A,B\}$ alors le point M' appartient à une droite Δ que l'on déterminera.

c) Déduire à l'aide de ce qui précède la construction de l'image M' d'un point M du de diamètre $[AB]/\{A,B\}$.

Exercice 7 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et I le milieu de $[AB]$. On considère l'application f de $P/\{I\}$ dans P qui à tout qui à tout point M d'affixe $z \neq \dfrac{1+i}{2}$ associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z^2 - i}{2z - (1+i)}$

1) a) Montrer que A et B sont les seuls points invariants par f.

b) Préciser les affixes des antécédents du point I par f.

2) a) Soit $z \in \mathbb{C}/\left\{1, \dfrac{1+i}{2}\right\}$. Montrer que $\dfrac{z'-i}{z'-1} = \left(\dfrac{z-i}{z-1}\right)^2$

b) En déduire que pour tout point $M \in P/\{A,B,I\}$ On a $\dfrac{BM'}{AM'} = \left(\dfrac{BM}{AM}\right)^2$ et que $\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

c) Sur quel ensemble se déplace le point M' lorsque M se déplace sur le cercle de diamètre $[AB]/\{A,B\}$

3) Soit Δ la médiatrice de segment $[AB]$. On suppose que M est un point de $\Delta/\{I\}$.

a) Vérifier que $M' \in \Delta$

b) Construire le point M' à l'aide d'un point M de $\Delta/\{I\}$

Exercice 8 le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 2i$, on considère l'application : $f : P/\{A\} \to P/\{A\}$ tel que $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{i\bar{z}-2}{z+i}$.

1) Montrer que f n'admet pas de point invariant

2) Montrer que f est bijective et pour tout $P/\{A\}$, On a $f^{-1}(M) = f(M)$.

3) a) Montrer que : $\dfrac{z'-i}{z-i} = -\dfrac{1}{|z-i|^2}$

b) En déduire que $AM'.AM = 1$ et que $A \in [MM']$

c) Déterminer l'image par f du cercle ζ de centre A et de rayon 2.

d) Construire le point M' lorsque M est un point de ζ.

4) Soit ζ' le cercle de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que l'image par f de $\zeta'/\{A\}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Construire le point $N' = f(N)$ lorsque N est un point de $\zeta/\{A\}$.

Exercice 9 Soit dans le plan complexe trois points A, B et C d'affixes respectifs : a , b et c non nuls et trois points P, Q et R d'affixes respectifs $p = \dfrac{|a|}{a}$, $q = \dfrac{|b|}{b}$ et $r = \dfrac{|c|}{c}$.

1) Soit H le point défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$

a) Montrer que H est l'orthocentre du triangle PQR.

b) Montrer que le triangle PQR est équilatéral si et seulement si $p+q+r=0$

2) On suppose dans cette question que $p+q+r=0$.

a) Soit z un nombre complexe. Comparer les réels S_1 et S_2 suivants: $S_1 = |z-a|+|z-b|+|z-c|$ et $S_2 = |p(z-a)+q(z-b)+r(z-c)|$.En déduire que pour tout z , On a : $|z-a|+|z-b|+|z-c| \geq |a|+|b|+|c|$

b) Montrer qu'il existe un point M du plan tel que MA + MB + MC soit minimal.

Exercice10 Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

1) $A(1)$, $M(z)$ et $M'(1+z^2)$ soient alignés.

2) $A(i)$, $M(z)$ et $M'(iz)$ soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 11 Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points A et B d'affixes respectives i et 2i. On considère l'application : $f : P \to P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{iz+2}{z-i}$.

1) a) Montrer que f possède deux points invariants, notés I et J.

b) Montrer que le triangle OIJ est isocèle et rectangle.

2) Montrer que pour $M \neq A$ et $M \neq B$; On a : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) + \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) Déterminer et construire les ensembles suivants : a) $(F) = \left\{M(z) ; z' \text{ est réel}\right\}$

b) $(E) = \left\{M(z) ; \arg(z') \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$ c) $(G) = \left\{M(z) ; \arg(z') + \arg(z-i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$

4) Soit M un point de $P/\{A\}$

a) Montrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) \equiv 0[2\pi]$

b) Donner alors une construction de point M' image par f d'un point M de l'ensemble (F) (déterminé dans la question 3) a))

Exercice 12 On définit les nombres complexes z_n de la manière suivante : $Z_0 = 1$, et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

1) Pour tout entier naturel n , On pose $U_n = z_n - i$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ On considère les points A_n et B_n d'affixes respectifs U_n et z_n ; $(n \in \mathbb{N})$.

a) Calculer le module et l'argument de U_n.

b) En déduire que les points A_n sont alignés.

c) Montrer alors que les points B_n sont alignés.

Exercice 13 En utilisant l'expression $(1+i)^{4p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $S = C_{4p}^0 - C_{4p}^2 + C_{4p}^4 + \ldots\ldots + C_{4p}^{4p}$ et $S' = C_{4p}^1 - C_{4p}^3 + C_{4p}^5 - \ldots\ldots - C_{4p}^{4p-1}$

Exercice 14 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 2\sqrt{3}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$; $\theta \in [0;\pi]$.

2) Mettre les solutions sous la forme exponentielle.

3) le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{i\theta}$ et $z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{i\theta}$,

a) Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire que OM_1M_2 est un triangle équilatéral.

4) a) Montrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Déterminer θ pour que la droite (M_1M_2) soit parallèle à la droite d'équation $y=-x$

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^4-2\sqrt{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)z^2+i=0$

Exercice 15 $(E): iz^2+2e^{i\theta}z-2i\cos(\theta)e^{i\theta}=0$; $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points M_1, M_2 d'affixes respectives $z_1=1+ie^{i\theta}$ e; $z_2=-1+ie^{i\theta}$

a) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle et montrer que $\frac{z_2}{z_1}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle et rectangle en O.

3) a) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une transformation que l'on précisera.

c) En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 16 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Soit dans P les points $M_1;M_2$ et M_3 d'affixes respectives les complexes $z_1;z_2$ et z_3. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral, si et seulement si $z_1+jz_2+j^2z_3=0$ ou

$z_1+j^2z_2+jz_3=0$ *avec* $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$(E): z^3-(1+\alpha+i\alpha)z^2+\alpha(1+i+i\alpha)z-i\alpha^2=0$; α désigne un paramètre complexe.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E)

b) Calculer les deux autres solutions z' *et* z'' *de* (E).

c) Soit dans P les points A;B et C d'affixes respectives les complexes $1;z'$ et z''. Déterminer les différentes valeurs du complexe α pour que le triangle ABC soit équilatéral (On pourra utiliser la question 1))

Exercice 17 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): iz^2+2\sin\theta z-2i(1+\cos\theta)=0$ où $\theta\infty]-\pi;\pi[$.

1) Vérifier que $\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)=\left[i(1+\cos\theta)\right]^2$. Résoudre alors l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points M' et M'' d'affixes respectives $z'=-(1+e^{-i\theta})$; $z''=1+e^{i\theta}$ ..

a) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle. En déduire que $\frac{z'}{z''}=e^{i(\pi-\theta)}$

b) En déduire que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs θ pour lesquelles le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

Exercice 18 Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(1-i)e^{i\alpha}z-ie^{i2\alpha}=0$ où $\alpha\in[0,\pi]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points $A; M'$ et M'' d'affixes respectives $1-i$, $e^{i\alpha}$ et $-ie^{i\alpha}$.

Déterminer α pour que les points $A; M'$ et M'' soient alignés.

Exercice19 Soit l'équation $(E): z^2-2(1+i\cos\theta)z+2i\cos\theta=0$; $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1 ; $z_1=1+ie^{i\theta}$; $z_2=1+ie^{-i\theta}$.

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

c) On pose $I=M_1*M_2$. Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

3) a) Ecrire $\frac{z_2-1}{z_1-1}$ sous forme exponentielle et en déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation que l'on précisera.

b) Déterminer θ pour que AM_1M_2 soit un triangle isocèle.

4) a) Montrer que lorsque θ varie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, la droite (M_1M_2) à une direction fixe.

b) Prouver donc que $M_2=S_\Delta(M_1)$ avec $\Delta: x=1$

c) Déterminer θ pour que OAM_2M_1 soit un losange.

Exercice 20 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2+(1-d)(1+i)z+d^2+1=0$ où d est un nombre complexe.

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $i; -i; d; z_1=i+d$; $z_2=-1-id$. Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe d tel que $OM_1=OM_2$.

3) On suppose que $|d|=3$. Montrer que le point M_1 appartient à un cercle fixe que l'on précisera.

4) On suppose que $\arg(d)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Montrer que le point M_2 appartient à une droite fixe que l'on précisera.

5) On suppose dans cette question que $|d|=1$; $d\neq i$ et $d\neq -i$.

a) Vérifier géométriquement que le triangle AMB est rectangle en M.

b) En déduire que le nombre complexe $\frac{-1-id}{i+d}$ est un réel.

6) Soit l'application $f_d : M(z) \to M'(z')$ tel que : $z' = \left(d - i\sqrt{3}\right)z + 1$

a) Déterminer d pour que f_d soit une translation.

c) Déterminer la transformation complexe associe à l'homothétie h de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre O.

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\varphi = f_1 \circ h$.

Exercice 21 I- On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_b) : z^2 - \left[2 + i\left(b + \bar{b}\right)\right]z + 1 - b\bar{b} + i\left(b + \bar{b}\right) = 0$ où b est un nombre complexe et $\bar{b}$ est le nombre complexe conjugué de b.

1) Développer $\left(b - \bar{b}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_b)

II- Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points A, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1; z_M = b; z_1 = 1 + ib$; $z_2 = 1 + i\bar{b}$.

1) Dans cette question on suppose que M appartient au cercle trigonométrique $(|b| = 1)$.

a) Montrer que lorsque b varie, les points M_1 et M_2 appartiennent à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

b) Déterminer les nombres complexes b pour lesquels le triangle OM_1M_2 est isocèle de sommet principal O. calculer pour chaque nombre complexe b obtenu z_1^{2006}.

2) A tout point M d'affixe b distinct de O et A on associe le point M' d'affixe $b' = \frac{\bar{b} - 1}{\bar{b}}$.

a) Vérifier que $b' - 1 = \frac{-1}{\bar{b}}$. En déduire que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de sens contraire.

b) Construire M' à partir du point M du cercle trigonométrique $\xi / \{A\}$.

Exercice 22 P désigne le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, α un réel de l'intervalle $]0; 2\pi[$ et ζ le cercle de centre B et de rayon 1.

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - i\left(2 - e^{i\alpha}\right)z + e^{i\alpha} - 1 = 0$

2) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

II) Soit f l'application de $P/\{B\}$ vers $P/\{A\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{\bar{z} - i}{z + i}$.

1) a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

b) Vérifier que $\forall\ z \in \mathbb{C}/\{i\}$; On a : $z' - 1 = \frac{-2i}{z + i}$

c) En déduire que $\forall\ M\in P/\{B\}$; Ona : $AM'.BM=2$ et $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) Construire le point M' a l ; à l'aide d'un point M de cercle ξ

2) Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $\left(\bar{z}-i\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\left(\bar{z}+i\right)^3$

a) Montrer que si z une solution de (E) alors z est réel.

b) Montrer que : $z'=e^{i\alpha}\Leftrightarrow z=-\cot g\frac{\alpha}{2}$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

d) Utiliser ce qui précède pour construire le point Ω antécédent par f de Ω' d'affixe $\omega'=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 23 Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne la droite Δ d'équation $y=1$ et M un point de Δ d'affixe z.

1) a) Vérifier que : $M(z)\in\Delta\Leftrightarrow|z|=|z-2i|$

b) On pose $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\theta[2\pi]$ avec $0<\theta<\pi$. Montrer que $|z|=\frac{1}{\sin\theta}$ et que $z=\cot g\theta+i$

2) Soit $n\in IN^*$ avec $n\geq2$, et (E) l'équation : $z^n=(z-2i)^n$.

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $M(z)\in\Delta$

b) Montrer que $\left(\frac{z}{z-2i}=e^{i\alpha}\ ;\ \alpha\neq2k\pi\right)\Leftrightarrow z=\cot g\frac{\alpha}{2}+i$; retrouver 2) a).

c) En déduire que (E) admet exactement n-1 solutions de la forme : $z_k=\cot g\left(\frac{k\pi}{n}\right)+i\ ;\ 1\leq k\leq n-1$

3) a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-2i)^k z^{n-k}=0$.

b) En déduire que : $z_1.z_2.....z_{n-1}=\frac{(2i)^{n-1}}{n}$.

c) Montrer alors que : $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).....\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$

4) Soit la suite définie sur $IN^*/\{1\}$ par : $U_n=\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).....\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

a) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et majorée.

b) Démontrer que $\forall n\in IN^*/\{1\}$; $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{1}{2^n}$ en déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 24 Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan P. $\theta\in\,]0;\pi[$, $A(1)$, $B(-1)$. On considère l'équation (E) d'inconnu $z\in\mathbb{C}$; $(E): z^2-2z+2\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta=0$. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E).

1) Montrer, sans résoudre (E), que $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Mettre sous forme trigonométrique les solutions ayants une partie imaginaire positive. En déduire la forme trigonométrique de l'autre solution.

4) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $1+\cos\theta+i\sin\theta$ et $1-\cos\theta-i\sin\theta$ et I le milieu de $[M_1M_2]$.

a) Donner l'affixe de I. b) Déterminer l'ensemble décrit par les points M_1 lorsque θ décrit $]0;\pi[$

c) En déduire l'ensemble décrit par les points M_2 lorsque θ décrit $]0;\pi[$

5) Soit $M'(z_1')$ avec $z_1'=\frac{1}{z_{M_1}}$.

a) Montrer que $\left(\frac{z_1+z_1'}{2}-1\right)\left(\frac{z_1+z_1'}{2}+1\right)=\left(\frac{z_1-z_1'}{2}\right)^2$

b) En déduire que $\overrightarrow{M_1M_1'}$ est un vecteur directeur de la bissectrice du secteur $[KA,KB]$ où K est le milieu de $[M_1M_1']$

Exercice 25 I) Déterminer les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants : $a=-i$ et $b=-2+2i$. On donnera les solutions sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

II) On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3-6iz^2-3(3+i)z-4+i=0$..

1) On pose $z'=z-2i$. Montrer que z est une solution de (E) ,si et seulement si, z' est solution de (E') avec $(E'): z^3+3(1-i)z+2-i=0$

2) Soit u et v deux nombres complexes tels que : $\begin{cases}u+v=2\\ u\times v=-1+i\end{cases}$

a) Montrer que z est une solution de $(E)\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+v^3=-2+i\\ u\times v=-1+i\end{cases}$

b) En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $(E''): X^2+(2-i)X+2(1+i)=0$

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E''). b) Déterminer alors les solutions de l'équation (E).

Exercice 26 On pose $A=1-2U+3U^2-4U^3+.....+(-1)^{n-1}nU^{n-1}$ avec $U_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; $k\in\{0;1;.....;n-1\}$

Calculer $(1+U)A$ puis en déduire A.

Exercice 27 Soit le polynôme $P(z)=z^4+z^3+z^2+z+1$.

1) Décomposer P en un produit de deux trinômes de $2^{ième}$ degré à coefficients réels.

2) En déduire le calcul des valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$

Exercice 28 le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit ABCD un quadrilatère convexe de sens indirect a , b , c et d les affixes respectives des points A , B , C et D. on construit à l'extérieur du quadrilatère les triangles M_1AB ; M_2BC ; M_3CD et M_4AD rectangles isocèle respectivement en $M_1;M_2;M_3;M_4$.

1) Déterminer en fonction de a, b, c et d des affixes des points $M_1;M_2;M_3;M_4$.

2) a) Démontrer que $(M_1M_3)\perp(M_2M_4)$. b) Démontrer que $M_1M_3=M_2M_4$.

Exercice 29 soit ABC un triangle, a, b, c les affixes respectives de A , B et C.

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral de sens direct, si et seulement si, $(c-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

2) Monter que ABC est un triangle équilatéral de sens indirect, si et seulement si, $(c-a)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

3) Monter que ABC est un triangle équilatéral, si et seulement si, $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Exercice 30 le plan complexe P qui est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère pour tout réel $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation $(E_\theta):z^2-2ie^{i\theta}z-4(1-i)e^{i2\theta}=0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

2) On considère les points M' et M'' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $-2(1-i)e^{i\theta}$ et le point N image de M' par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que pour tout réel $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, le point M' appartient à un cercle que l'on précisera.

b) Déterminer l'affixe de point N. c) Montrer que OM'NM'' est un parallélogramme.

d) En déduire une construction du point M'' à partir de M'.

3) Soit l'équation $(E'_\theta):\left(\sqrt{2}z+1\right)^3=(-2+2i)e^{i\theta}$.

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2+2i)e^{i\theta}$.

b) Soit $\alpha\in]0;2\pi[$, Montrer que $\frac{\sqrt{2}z-1}{z}=\sqrt{2}e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

En déduire les solution de l'équation (E'_θ).

Exercice 31 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6+i=0$.

2) a) On pose $f(z)=z^6+i$, écrire $f(z)$ en produit de six facteurs de 1er degré.

b) Justifier que : $1-e^{i\alpha}=-2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ pour tout réel α.

c) Calculer f (1) de deux façons, en déduire que : $\sum_{K=0}^{5}\sin(-\frac{\pi}{24}+\frac{K\pi}{6})=-\frac{\sqrt{2}}{64}$

3) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -i(2-z)^6$.

a) Montrer que si z est solution de (E) alors $|z| = |2-z|$ et que $z = 1+iy$; $y \in IR$.

b) Montrer que si z est solution de (E) alors $\arg(z) + \arg(2-z) \equiv 0[2\pi]$

c) Si on pose $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$, montrer que $12\theta \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) En déduire une construction des images des solutions de (E), et donner ces solutions.

Exercice 32 Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $(z+i)^5 = (z-1)^5$

1)a)Montrer que si z est une solution de (E) alors $-z$ est aussi une solution de (E)

b) Montrer que si z est une solution de (E) alors z est un réel.

2) a) $\left(\frac{z+i}{z-i} = e^{i\alpha}\ , (\alpha \neq 2k\pi)\right) \Leftrightarrow \left(z = \cot g\frac{\alpha}{2}\right)$ b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0$

b) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cot g\frac{\pi}{5}$ et $\cot g\frac{2\pi}{5}$

Exercice 33 Soit le nombre complexe $m = e^{i\theta}$ avec θ est un réel élément de $[0;2\pi]$. On considère l'équation $(E) : z^2 - m(m+i)z + im^3 = 0$; $z \in \mathbb{C}$.

1) a) Vérifier que $z_1 = im$ est une solution de (E). Quelle est la $2^{ième}$ solution z_2,

b) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique. En déduire les valeurs de m pour lesquelles z_1 et z_2 sont conjugués.

2) le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A ; M ; M_1 et M_2 d'affixes respectives -1 , m , $z_1 = im$ et $z_2 = m^2$

a) Montrer que pour $m \neq i$; $\frac{z_2+1}{z_1+1} = 1-im$

b) Déterminer m pour que les points A ; M_1 et M_2 soient alignés.

c) Déterminer m pour que AM_1M_2 soit un triangle équilatéral indirect.

Exercice 34 Soit r un réel de $]0;1[$ et θ un réel de $]0;\frac{\pi}{2}[$.

I) 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2zr\cos\theta + r^2 = 0$

b) On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) Pour tout n de IN, on pose $U_n = z_1^n + z_2^n$.

a) Exprimer U_n en fonction de n. b) Montrer que $|U_n| \leq 2r^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

II- Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points

M, M_1, M_2 et M' d'affixes respectives z_1; z_2 ; $\frac{z_1}{z_2}$ et $z' = z_2 + \frac{z_1^2}{z_2}$

1) a) Montrer que les points. M, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux.

b) Montrer que les points. M, M_1 et M_2 appartiennent au même cercle de centre O et que $MM_1 = MM_2$.

c) Exprimer $\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right)$ en fonction de θ. En déduire l'ensemble des points M pour que le triangle MM_1M_2 soit équilatéral.

2) a) Donner la forme exponentielle de z'. b) En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

c) Montrer que le milieu I de $[OM']$ est le projeté orthogonal de M_1 sur (OM)

3) A partir du point M, Donner une construction géométrique des points M' ; M_1 et M_2.

Exercice 35 m un nombre complexe.

I- On considère dans $\mathbb{C}$ les équations à inconnu z ; $(E): z^2 - mz + 1 - im = 0$ et

$(E'): iz^3 + (m-1-im)z^2 + (-m^2+2m+i)z + (m-1)(1-im) = 0$

1) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors z_0 est une solution de (E').

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E').

II- Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 1$; $z_1 = m + i$; $z_2 = (1+i)m - 1$ et $z_3 = im - i$.

1) a) Quelle est la nature du triangle BM_1M_3 ?

b) En déduire que pour tout m de $\mathbb{C}/\{1-i\}$, le quadrilatère $BM_1M_2M_3$ est un carré.

2) On suppose que $m = \sqrt{3} + 2e^{i\theta}$; $\theta \in [-\pi; \pi]$. Donner la forme exponentielle de z_1.

3) Soit $\Gamma = \left\{ M(m) \in P / \arg\left(\frac{im-i}{m+i}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$.

a) Montrer que $\Gamma = \xi / \{A, B\}$ où ξ est un cercle que l'on précisera.

b) Soit I le centre de ξ. Montrer que $A = R_{\left(I, \frac{\pi}{3}\right)}(B)$. En déduire l'affixe de I et le rayon de ξ.

Exercice 36: Soit E l'équation dans C : $z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0, a \in C$.

1/a) Résoudre dans C l'équation (E) .on notes z_1 et z_2 les solutions de (E).

b) Montrer que : $(|z_1| = |z_2|) \Leftrightarrow (a \in \mathbb{R})$.

2/Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On donne les quatre points A, B, M et N d'affixes respectives 1, -1 + 2i, i + a et i-a.

a) Montrer que M et N sont symétriques à un point fixes I que l'on précisera. Lorsque $M \notin (AB)$ donner la nature de quadrilatère AMBN

3/On suppose que $a = e^{i\theta} - 2i$ ou $\theta \in [0, 2\pi]$

a) Montrer que M décrit un cercle (ζ) fixe que l'on précisera lorsque θ varie dans $[0, 2\pi]$

b) En déduire l'ensemble (ζ) de point N lorsque θ varie dans

RESUME DU COURS

Définition :
Une application du plan dans lui-même est une isométrie si elle conserve les distances.
C'est-à-dire, si $M'N' = MN$ pour tous les points M et N du plan d'images respectives M' et N'

Théorème : L'identité du plan, les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.

- Les images de deux points distincts du plan par une isométrie sont deux points distincts.

Théorème : Une application du plan dans lui-même est une isométrie, si et seulement si, elle conserve le produit scalaire.

Une application f est une isométrie, si et seulement si, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ pour tous points A , B et C d'images respectives A', B' et C'.

Théorème : Soit f une application du plan. Si A , B et C sont trois points deux à deux distincts, d'images respectives A', B' et C', alors $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. On dit qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.

Théorème : Les images par une isométrie de trois points non alignés sont trois points non alignés

Théorème : Soit f une isométrie, A , B et C sont trois points non alignés d'images respectives A', B' et C'. Si le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est orthogonal alors le repère $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ est orthogonal. De plus , pour tout point M d'image M ', $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels, implique que $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$

Théorème : Une isométrie f est une bijection du plan dans lui-même. L'application du plan dans lui-même qui à tout point N du plan associe son unique antécédent M par f est une isométrie appelée réciproque de f et notée f^{-1}.

Théorème : Pour toute isométrie f et tout point M, $f(M) = N$, si et seulement si, $f^{-1}(N) = M$.

- La réciproque d'une symétrie orthogonale est elle-même.
- La réciproque d'une symétrie centrale est elle-même.
- La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$
- La réciproque d'une rotation de centre I et d'angle α est la rotation de centre I et d'angle $-\alpha$

Théorème : Soit f une isométrie et A, B, C et D des points d'images respectives A', B', C' et D' par f. si $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{C'D'}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème : La composée de deux isométries est une isométrie.

Théorème : La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécantes est une rotation. Plus précisément, si D et D' sont deux droites sécantes en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D', alors $S_{D'} \circ S_D$ est la rotation de centre I, et dans ce cas $S_{D'} \circ S_D = S_D \circ S_{D'}$.

Théorème : La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation. Plus précisément, si D et D' sont deux droites parallèles et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes

respectifs D et D', alors $S_{D'} \circ S_D$ est la translation de vecteur $2\vec{IJ}$ où I est un point de D et J est le projeté de I sur D'.

Théorème : Soit f et g deux isométries. $g = f^{-1}$, si et seulement si, $f \circ g = Id$ où Id désigne l'identité du plan.

Propriété : Si f et g sont deux isométries, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Propriété : Soit f, g et h trois isométries, $f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$

Théorème : Soit f une isométrie différente de l'identité, A un point non fixe et A ' son image . alors les points fixes de f, s'ils existent , se trouvent sur la médiatrice de segment [AA']

Théorème : Une isométrie fixe trois points non alignés, si et seulement si, c'est l'identité du plan.

Théorème : Si deux isométries f et g coïncident sur trois points non alignés, alors elles coïncident partout dans le plan. On dit qu'une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Théorème : Soit une isométrie fixes deux points distincts A et B , alors elle fixe tous les points de la droite (AB).

Théorème : Soit une isométrie fixe deux points distincts A et B , et si elle est différente de l'identité, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Théorème : Soit une isométrie fixe un unique points distinct I, alors f est une rotation de centre I et d'angle non nul .

Théorème : Soit O un point du plan. Alors toute isométrie f se décompose de manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O.

Théorème : Une isométrie qui n'a aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ.

Définition : La composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ est appelée symétrie glissante.

Théorème : Toute isométrie se décompose en au plus trois symétries orthogonales.

Théorème : Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants. Plus précisément, soit r une rotation de centre I et d'angle θ et D une droite quelconque passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors $r = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u'}$ tel que $2\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right) \equiv \theta [2\pi]$

Théorème :Soit S_I la symétrie orthogonale de centre I et D une droite passant par I. alors $S_I = S_{D'} \circ S_D = S_D \circ S_{D'}$, où D' est la droite perpendiculaire à D en I.

Théorème :Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles. Plus précisément, soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et D une droite quelconque de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$ et H un point de D. Alors $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite parallèle à D et passant par le point K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$

LES EXERCICES

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse:

1) La composée de deux symétries orthogonal est soit une rotation d'angle non nul soit une translation de vecteur nul.

2) si f est une isométrie qui fixe deux points distincts alors f est une symétrie orthogonale.

3) une isométrie qui laisse globalement invariant la réunion de deux droites sécantes en O, Δ et Δ' alors f(0)=0

4) une isomérie qui fixe un point A alors f est une rotation de centre A.

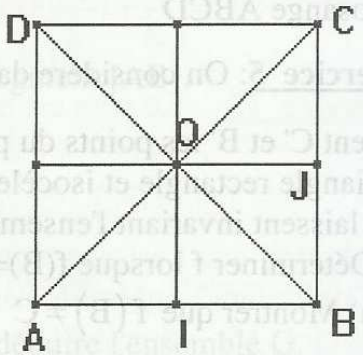
5) f: M (Z) $\rightarrow$M'(Z') tel que: $Z' = i\overline{Z} + 2$ est une isométrie.

6) f une application ; A, B et C trois points non alignés du plan tel que f(A)=A ; f(B)=B; f(C)=C alors f= Id_P.

7) soit ABC un triangle rectangle en B ; I=A*B ; J=B*C et f une isométrie tel que $t_{\overrightarrow{AC}} \circ f = S_{(IJ)}$ alors f est une symétrie glissante.

8) La composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale est une symétrie glissante

Exercice 2: Cocher la ou (les) réponse(s) correcte(s). Soit ABCD un carré de centre O, I=A*B, J=B*C 1) l'application: S_O =



a) $S_{(OI)} \circ S_{(OJ)}$	b) $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$	c) $S_{(OI)} \circ S_{(OC)}$	d) $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$

2) $t_{\overrightarrow{AB}}$ =

a) $S_{(AB)} \circ S_{(CB)}$	b) $S_{(AD)} \circ S_{(OI)}$	c) $S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$	d) $S_{(BC)} \circ S_{(OI)}$

3) une isométrie qui fixe A, B et C alors f est:

a) $S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$	b) $S_{(AB)}$	c) id_P	d) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$

4) une isométrie f fixe I et O et transforme A en B alors:

a) $f=S_{(OI)}$	b) $f=S_{(AB)}$	c) $f=S_{(OB)}$	d) on ne peut pas conclure

5) une isométrie *f* transforme le triangle ABC au triangle ACD alors :

(i) f(B)=	a) A	b) C	c) D

(ii) f({A, C})=	a) {A, C}	b) {C, D}	c) {A, D}

6) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ est:

a) rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$	b) rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$	c) rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$

7) une isométrie qui laisse globalement invariant un triangle ABC de centre O alors f(O)=

a) A	b) O	c) B	d) C

8) $\left(t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(OI)}\right)^{-1}$ =

a) $S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$	b) *b)* $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(OI)}$	*c)* $S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

Exercice 3 1) Soit ABC un triangle équilatéral directe.
Soit f une isométrie qui laisse invariant le triangle ABC.
a) Montre que le centre de gravité G de ABC est fixe par f.
b) Supposons que f(A) =A, déterminer f
c) supposons que f(A) =B, déterminer f
Citer tous les isométries qui laissent invariant le triangle ABC.
2) Soit D = $S_{(AC)}$(B). On se propose de déterminer tous les isométries h qui transforme le triangle ABC au triangle ACD.
a) On pause g = $S_{(AC)}$°h; déterminer l'image par g du triangle ABC.
b) En déduire tous les isométries h.

Exercice 4 Soit ABCD un losange de centre O non réduit à un carré; on se propose de déterminer les isométries f du plan qui laissent globalement invariant le losange ABCD.
1) Montrer que f (O) =O (vérifier d'abord que: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$)
2) Montrer que $f(A)\notin\{B,D\}$
3) a) Montrer que si f(A) =C alors $S_{(BD)}$°f fixe les points A et O.
b) En déduire les isométries f tel que f(A) =C.
4) Déterminer les isométries f fixant le point A. en déduire les isométries qui laisse globalement invariant le losange ABCD

Exercice 5: On considère dans le plan un triangle ABC rectangle en B tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
Soient C' et B' les points du plan tel que BCC' est un triangle rectangle et isocèle de sens directe et BAA' u n triangle rectangle et isocèle de sens indirecte. On se propose de déterminer l'ensemble des isométries f qui laissent invariant l'ensemble {B, C, C'}.
1) Déterminer f lorsque f(B)=B ; f(C)=C et f(C')=C'
2) a) Montrer que $f(B)\neq C$
b) Montrer que $f(B)\neq C'$. Déterminer l'ensemble des isométries f qui laissent invariant l'ensemble {B, C, C'}.

Exercice 6: Dans un plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC direct; on désigne par I, J et K les milieux respectifs des cotés [BC], [AC] et [AB] et par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soit Δ la perpendiculaire à (AB) en B, on désigne par R_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par R_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
1) Déterminer la droite Δ_1 tel que $R_1=S_{\Delta_1}\circ S_{(OC)}$
2) Déterminer la droite Δ_2 tel que $R_2=S_{(OC)}\circ S_{\Delta_2}$.
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de R_1°R_2.
4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications $R_3=S_\Delta$°$S_{(BC)}$ et R_3°R_1.
5) On pose f =R_1^{-1}°R_3°R_1.

a) montre que f est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b) En déduire que: $R_1 \circ R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} = t_{\overrightarrow{AB}}$

c) Soit M un point du plan, on pose $M' = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(M)$ et $M'' = R_1(M)$, montrer que ABM''M' est un parallélogramme.

Exercice 7: Soit ABC un triangle rectangle en A et isocèle tel que et soit I =A*B, J =A*C et O =B*C.

1) Soit f une isométrie qui laisse ABC globalement invariant.

a) Montrer que f laisse le segment [BC] globalement invariant. En déduire que $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$

b) Montrer que f(O) =O et f(A) =A

c) En déduire toutes les isométries qui laissent ABC globalement invariant.

2) Soit A' et C' les deux points définis par $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$ et g une isométrie qui transforme le triangle ABC en le triangle ACC'.

a) Montrer que $t_{\overrightarrow{CB}} \circ g$ est une isométrie qui laisse ABC globalement invariant.

b) En déduire toutes les isométries qui transforment ABC en A'CC'.

Exercice 8: On considère un rectangle ABCD (non carré) de centre O.

1) Déterminer l'ensemble E des isométries qui laisse globalement invariant le segment [AB].

2) Soit F l'ensemble des isométries qui transforment [AB] en[CD].

a) Montrer que pour tout f de F on a $t_{\overrightarrow{AD}} \circ f \in E$

b) En déduire que $F = \left\{t_{\overrightarrow{AD}}, S_O, S_{(OI)}, t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_\Delta\right\}$.où Δ est la médiatrice de [AB].

3) Soit G l'ensemble des isométries qui transforme {A, B, D} en {B, C, D}.

a) Montrer que si $f \in G$ alors f(O) =O et $f(\{B,D\}) = \{B,D\}$ et f(A) =C. En déduire l'ensemble G.

4) Déterminer l'ensemble des isométries qui laisse globalement invariant ABCD.

Exercice 9 : C_1 et C_2 deux cercles de même rayon de centres respectifs O_1 et O_2. Déterminer toutes les isométries qui transforment C_1 en C_2.

Exercice 10: Dans un plan on considère un hexagone régulier convexe ABCDE inscrit dans un cercle C de centre O soit $\gamma = \{A,B,C,D,E,F\}$.

Soit f une isométrie qui laisse l'ensemble γ invariant.

1) Montrer que O est invariant par f.

2) Déterminer les isométries laissant invariant l'ensemble γ.

Exercice 11: Dans un plan orienté P, on considère un carré ABCD de centre O tel que: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications suivantes:

$f = S_{(CB)} \circ S_{(OC)}$; $g = S_{(OC)} \circ S_{(OJ)}$; $h = S_{(OJ)} \circ S_{(DC)}$ et $K = S_{(OA)} \circ S_O \circ S_{(OD)}$

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications suivantes:

$f \circ g$ et $g \circ h$

Exercice 12: Soit ABCD un rectangle et I =B*C et J =A*D

Soit la transformation $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$. a) Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 13 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $f : P \to P$; $M(x,y) \mapsto M'(x',y') / \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie. 2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3) En déduire la nature de f.

4) Soit O' l'image de O par f, déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IO'})$. En déduire les éléments caractéristiques de f.

Exercice 14: Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application d'expression complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. Démontrer que f est une isométrie du plan. Caractériser f.

Exercice 15: Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $f : P \to P$; $M(x,y) \mapsto M'(x',y') / \begin{cases} x' = 1 - y + 1 \\ y' = 2 - x \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f. 3) En déduire la nature de f.

Exercice 16: Soit ABCD un carré de sens direct et de centre O.

1) Soit f une isométrie qui transforme le triangle ABC en ACD.

a- Montrer que f(B) =D et f(O) =O. b- Déterminer les isométries f qui transforment ABC en ACD.

2) On considère les isométries: $g_1 = T_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$ *et* $g_2 = T_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$

a- Montrer que g_1 est une symétrie orthogonale dont on précisera son axe.

b- Montrer que g_2 est une symétrie glissante. Préciser sa forme réduite.

Exercice 17 : Dans le plan orienté, on donne un losange ABKI, tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

On note : J=A * I et O =I * K, C = S_I (A) et B'= S_I (K). On se propose de caractériser les isométries f qui transforment A en I et I en K

1) On pose $g = foT_{\overrightarrow{BA}}$ .a) Déterminer g (B) et g (K). b) Caractériser alors les isométries g.

c) En déduire que: $f = S_{(AK)}ot_{\overrightarrow{AB}}$ ou $f = R_{\left(K,\frac{\pi}{3}\right)}ot_{\overrightarrow{AB}}$.

2) On pose $f_1 = R_{\left(K,-\frac{\pi}{3}\right)}ot_{\overrightarrow{AB}}$

On désigne par H le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)

a) Déterminer les axes Δ et Δ' telles que : $R_{\left(K,\frac{\pi}{3}\right)} = S_\Delta o S_{(BK)}$ et $R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(BK)} o S_{\Delta'}$

b) En déduire que: $R_{\left(K,\frac{\pi}{3}\right)} o R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)} = t_{\overrightarrow{AB}}$. c) Identifier alors l'isométrie f_1.

3) On pose $f_2 = S_{(AK)} o t_{\overrightarrow{AB}}$ et D = S_B(A). a) Montrer que f_2 (B') = B et f_2 (B) = C ; $f_2(A) = I$.

b) Montrer que $f_2 = t_{\overrightarrow{JO}} o s_{(JO)}$

4) Soit $\varphi = f_2^{-1} o f_1$. a) Déterminer φ (A), φ (I) et φ(B) puis caractériser φ.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient: $f_1(M) = f_2(M)$.

Exercice18: Soit ABCD un carré de sens direct et de centre O .On désigne par I et J les symétriques les symétriques respectifs de O et A par rapport à la droite (BC) et par Δ la médiatrice de $[AB]$.

1) Caractériser la rotation r qui envoie B en C et C en D .

2) Soit $f = r o S_{(OI)}$ .a)Montrer que $r = S_{(OC)} o S_{(OI)}$ .b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

3) Soit $g = t_{\overrightarrow{OI}} o r^{-1}$ .a) Montrer que $r^{-1} = S_{(\Delta)} o S_{(OD)}$ et $t_{(\overrightarrow{OI})} = S_{(BC)} o S_{(\Delta)}$.

b) Montrer que g est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

4) Soit $h = S_{(OI)} o S_{(BC)} o S_{(\Delta)}$ .Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h .

Exercice19 Soit ABCD un losange de centre I et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .On désigne par E le symétrique de B par rapport à D et par Δ la médiatrice de $[BE]$ .1) Caractériser les applications suivantes : S_Δ o $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$ o $S_{(AC)}$ .2) Soit $f = t_{\overrightarrow{BD}} o r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$ a)Déterminer la droite (Δ') telle que $t_{\overrightarrow{BD}} = S_{(AC)} o S_{(\Delta')}$.

b) Caractériser l'application $S_{(\Delta')} o S_{(AB)}$. c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

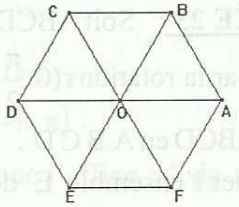
3) Soit $g = S_I o r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$. a) Déterminer la droite (Δ'') tel que $r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(BD)} o S_{(\Delta'')}$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .

4)a) Caractériser l'application $g o f^{-1}$ .b) Soit M un point du plan qui n'appartient pas à la droite (BC).

On pose $N = f(M)$ et $P = g(M)$. Montrer que BNEP est un parallélogramme.

Exercice N°20: Le plan est orienté dans le sens direct. On donne un hexagone régulier ABCDEF de sens direct et de centre O .



1) Soit f une isométrie de P qui vérifie $f(A) = O$ et $f(B) = D$.

a) On pose $g = f \circ t_{\overrightarrow{OA}}$. Déterminer $g(O)$ et $g(C)$.

b) En déduire qu'il existe exactement deux isométries f qui vérifient $f(A) = O$ et $f(B) = D$

c) Déterminer l'image de O par chacune des isométries.

2) Soit $\varphi = R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{OA}}$ et soit Δ la médiatrice du segment $[BC]$.

Déterminer les droites D_1 et D_2 telles que $R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{D_1} \circ S_\Delta$ et $t_{\overrightarrow{AO}} = S_\Delta \circ S_{D_2}$, caractériser alors φ.

3) Soit $\psi = S_{(OJ)} \circ t_{\overrightarrow{AO}}$ où $J = C * D$. Déterminer l'image de la droite (EF) par la transformation ψ^{-1}.

4) Soit $h = \varphi \circ \psi^{-1}$ .a) Déterminer $h(O)$ et $h(A)$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de h

b) Pour tout point M de P, on note $M_1 = \varphi(M)$ et $M_2 = \psi(M)$. Déterminer l'ensemble des points M tel que le quadrilatère FBM_1M_2 est un rectangle.

Exercice21: Dans le plan oriente, on considère rectangle ABCD tel que $AB = 2AD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$ et K le symétrique de I par rapport a (DC) .1) On pose $f = S_{(IC)} o T_{\overrightarrow{AB}} o S_{(IJ)}$ .a) Caractériser l'application: $S_{(BC)} o S_{(IJ)}$

b) En déduire que f est une rotation dont-on précisera l'angle et le centre.

2) Soit M un point de la demi droite $[BA)$ .La perpendiculaire a (CM) en C coupe (IJ) en N .

a) Montrer que $f(M) = N$, en déduire la nature de triangle CMN

b) On pose $x = B\widehat{M}C$ avec $M \neq B$ et $M \neq I$ .Montrer que $tg(B\widehat{M}N) = \frac{1+tgx}{1-tgx}$

En déduire la positions de M pour laquelle $tg(B\widehat{M}N) = 3$

3) On pose $g = t_{\overrightarrow{IK}} o S_{(IC)}$. a) Caractériser l'application $g o S_{(AJ)}$

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

EXERCICE 22 : Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre I , et A', B', C', le symétrique de A, B, C par rapport à I . On se propose de déterminer l'ensemble E des isométrie qui transforme ABC en A'B'C'.

1) Quel est le centre du triangle A'B'C'.

2) Déterminer l'ensemble E' des isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

3) Soit f une isométrie plan .On pose $g = S_I$ o f .Montrer que g est un élément de E' si et seulement si f est un élément de E.

4) Caractériser les applications suivantes : $S_I or\left(I, \frac{2\pi}{3}\right), S_I or\left(I, -\frac{2\pi}{3}\right), S_I o S_{(OA)}, S_I o S_{(OB)}$ et $S_I o S_{(OC)}$.

5) En déduire l'ensemble E.

EXERCICE 23 : Soit ABCD un rectangle non carré de centre O .On désigne par A'B'C'D' l'image de ABCD par la rotation $r(0, \frac{\pi}{2})$ .On se propose déterminer l'ensemble E des isométries qui transforme le rectangle ABCD en A'B'C'D'.

1)Déterminer l'ensemble E' des isométries qui laisse globalement invariant le rectangle ABCD .

2) Soit f une isométrie du plan. On pose $g = r(0, -\frac{\pi}{2}) o f$ Montrer que g est un élément de E' si et seulement

si f est un élément de E .

3)a) Soit Δ la médiatrice du segment $[AD]$ .Montrer que $r(0,\frac{\pi}{2})oS_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale d'axe Δ' que l'on précisera.

b) Soit Δ_1 la médiatrice du segment $[AB]$ .Montrer que $r(0,\frac{\pi}{2})oS_{\Delta_1}$ est une symétrie orthogonale d'axe Δ'' que l'on précisera.4) En déduire l'ensemble E .

EXERCICE24 : Soit ABCD un losange non carré de sens direct et de centre O et tel que : $AC < BD$

On désigne par A', B', C' et D' les image de A, B, C et D par la symétrie S_C de centre C .On se propose de déterminer l'ensemble G des isométries qui transforment $\{A,B,C,D\}$ en $\{A',B',C',D'\}$.

1) Déterminer l'ensemble F des isométries qui laissent globalement invariant $\{A,B,C,D\}$.

2) Soit f une isométrie du plan. On pose $g = S_c \circ f$ .Montrer que $g \in G \Leftrightarrow f \in F$.

3)a) Montrer que $S_C \circ S_{(BD)} = S_{(AC)} \circ t$ ou t est une translation que l'on précisera.

b) Caractériser les applications suivantes : $S_C \circ S_{(AC)}$ et $S_C \circ S_O$. 4) En déduire l'ensemble G .

Exercice 25: Soit ABCD un carré de sens direct et de centre O .On désigne par $A'B'C'D'$ l'image de ABCD par la rotation $r(0,\frac{\pi}{4})$ .On se propose de déterminer l'ensemble E des isométries qui transforment ABCD en $A'B'C'D'$.

1) Déterminer l'ensemble E' des isométries qui laissent globalement invariant le carré ABCD .

2) Soit f une isométrie du plan. On pose $g = r(0,-\frac{\pi}{4})of$.

Montrer que g est un élément de E' si et seulement si f est un élément de E .

3) Soit Δ une droite passant par O .Montrer que $r(0,\frac{\pi}{4})oS_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale d'axe Δ' que l'on précisera. 4) En déduire l'ensemble E .

Exercice N°26 : P est le plan complexe muni d'un repère direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et m un paramètre complexe.

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):(i-1)z^2+(1-i)(m-i)z-2(m-i)^2=0$.

2) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 de l'équation (E) . Déterminer l'ensemble décrit par chacun des points M_1 et M_2 lorsque m varie et $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

II) Soit l'application $f : P \to P$, $M(z) \mapsto M'(z')$; $z' = (1+im)\bar{z} + (1-i)(m-i)$

1) Montrer que f est une isométrie de P, si et seulement si, $m = i + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi,\pi]$

2) On prend $m = i + e^{i\theta}$. Soit $M(z)$ un point de P et soit $M'' = f \circ f(M)$. Montrer que l'affixe z'' de M'' est $z'' = z + (1-i)(e^{i\theta}-1)$. En déduire que si $\theta \neq 0$ alors f n'admet aucun point invariant.

3) On prend $m = 1+i$. Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f.

4) On prend $m = i + e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$. Soit A le point d'affixe 1, déterminer les affixes des points $A' = f(A)$ et $A'' = f(A')$. Montrer que f n'est pas une translation puis donner la nature de f.

Exercice 27: ABCD un carré de centre O de sens direct, I =A*B, J =C*D, et E =S_D(A).
Soit f une isométrie du plan vérifiant: f(A) =C et f(I) =J .1)a)Montrer que f(B) =D.
b) Montrer que si f possède un point invariant M alors nécessairement M =O
c) Soit C' =f(C). Préciser la nature du transformé par f du triangle ABC.
En déduire que l'on a: soit C' =A, soit C' =E.
2) a) On suppose que C' =A, chercher alors f(O) et préciser le nature et les caractéristiques de l'isométrie f.
b) On suppose maintenant que C' =E, déterminer alors le point O' =f(O) et montrer que l'application $g = t_{\overrightarrow{CB}} \circ f$ laisse fixes les points I et O. On déduire la nature les éléments caractéristiques de g.

Exercice28: Soit ABCD un rectangle de centre O tel que AB = 2AD .On désigne par E le barycentre des points pondérés (A,1),(B,2) et par F le barycentre des points pondérés (C,1),(D,2) et par I le milieu de segment [AE].

1) Déterminer l'ensemble (Γ_1) des isométries du plan qui laissent globalement invariant le segment [AE].

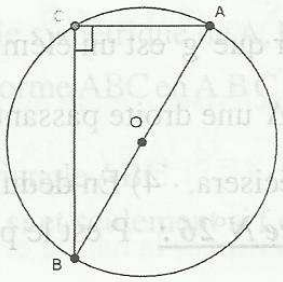
2) Soit (Γ_2) l'ensemble des isométrie qui transforment le segment [AE] en le segment [CF].

a) Soit S_K le symétrie de centre K , f et g sont deux isométrie du plan tel que $g = S_K \circ f$ .Montrer que g est un élément de (Γ_1) si et seulement si f est un élément de (Γ_2) .b) En déduire l'ensemble (Γ_2).

3)a) Montrer qu'il existe une seule isométrie du plan qui envoie $\{A,D,E\}$ sur $\{C,F,I\}$.

b) En remarquant que h appartient à l'ensemble (Γ_2), déterminer h .

c) Montrer que $h = t_{\overrightarrow{OI}} \circ S_{(\Delta)}$ avec (Δ) est la médiatrice de [BC].Le cercle (ξ) de diamètre [DE] et le cercle (ξ') de diamètre [CI] se coupe en M et N .La parallèle à la droite (AB) passant par M recoupe le cercle (ξ') en N' .Montrer que AN = FN' .



Exercice 29:Le plan P est orienté dans le sens direct .On considère un triangle ABC rectangle en C, inscrit dans un cercle (ζ) de centre O et tel que :
$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ On désigne par : I le milieu de [BC],
D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de O par rapport à I.
1°/ Montrer que [DE] est un diamètre de (ζ).
2°/ Soient : $k = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$ et $h = S_{(ED)} \circ S_{(OA)}$. a)Caractériser chacune des isométries k, h et $h \circ k^{-1}$
b)Déterminer l'image de la droite (BD) par k.
c)Soit M point du plan n'appartenant pas à la droite (BD). On pose M'=k(M) et M'' = h (M).
i)Montrer que le quadrilatère BM'CM'' est un parallélogramme.
ii)Où faut-il placer M pour que BM'CM'' soit un losange ?
3°/ On se propose de déterminer les isométries f de P qui vérifient : f(E) = A et f(C) = D .Soit g l'isométrie telle que : $g = t_{\overrightarrow{AE}} \circ f$. a)Déterminer g(E) et g(C). b)Montrer que : $g = R_{\left(E, -\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $g = S_{(ED)}$.
c)On suppose que $g = R_{\left(E, -\frac{2\pi}{3}\right)}$. Déterminer les droites Δ et Δ' tels que $R_{\left(E, -\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(EB)} \circ S_{\Delta}$ et $t_{\overrightarrow{EA}} = S_{\Delta'} \circ S_{(EB)}$
Caractériser alors f. d)On suppose que $g = S_{(ED)}$. Montrer que f est une symétrie glissante.
(on pourra considérer le point H projeté orthogonal de A sur (ED)).

RESUME DU COURS

Théorème : Toute symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposées. (On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation).

Théorème : La composée de deux symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés. (On dit que la composée de deux symétries orthogonales conserve l'orientation).

Théorème : On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientées. On appelle antidéplacement toute isométrie qui change les mesures des angles orientées en leurs opposées.

Théorème : Une isométrie est un déplacement, si et seulement si, elle est la composée de deux symétries orthogonales.

Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales.

Classification des isométries :

Identité	Déplacement
Rotation	Déplacement
Translation	Déplacement
Symétrie orthogonale	Antidéplacement
Symétrie glissante	Antidéplacement

Théorème :- la composée de deux déplacement est un déplacement.
- la composée de deux antidéplacement est un déplacement.
- la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- la réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Théorème : Deux déplacement qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Deux antidéplacement qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Théorème : Soit A , B , C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$. Il existe un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D. Il existe un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.

Théorème :Soit f un déplacement et A , B , C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Si A' , B' , C' et D' sont les images respectives par f des points A , B , C et D, alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}\right) [2\pi]$. En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$, on dit que f est un déplacement d'angle θ.

Théorème : Soit f est un déplacement d'angle θ. Si $\theta = 2k\pi$, alors f est une translation. Si $\theta \neq 2k\pi$, alors f est une rotation d'angle θ.

Théorème : Si f est un déplacement d'angle θ et g est un déplacement d'angle θ', alors $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$. Si f est un déplacement d'angle θ, alors f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$

Théorème :La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est une translation $t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$

Théorème :La composée de deux rotations r et r' d'angles θ et θ' et de centres respectifs O et O ' est soit une translation de vecteur non nul, soit une rotation d'angle non nul.

Si $\theta+\theta'=0[2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur non nul.

Si $\theta+\theta'\neq 0[2\pi]$, il s'agit d'une rotation d'angle non nul.

Théorème La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est une rotation d'angle θ

Théorème :Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. l'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z'=z+b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.

Théorème :Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. l'application f est une rotation d'angle θ et de centre I, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tel que

$z'=az+b$; avec $a=e^{i\theta}$; $a\neq 1$ et $z_I=\dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Théorème :Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Théorème :Soit f une symétrie glissante. Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que $f=t_{\vec{u}}\circ S_D$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D. cette décomposition est appelée forme réduite de f.

Propriété :Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D. M un point d'image M' par f.

- Le milieu de $[MM']$ appartient à D.
- Si M est un point de D, alors $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$
- $f\circ f$ est une translation de vecteur $2\vec{u}$

LES EXERCICES

Exercice 1 Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) f et g sont deux rotations d'angles respectives $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow f\circ g$ est une translation.

2) f: M(Z)→M'(Z') tel que $Z'=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)Z+i$ est une rotation.

3) un déplacement qui fixe deux points distincts donc f est l'identité du plan.

4) Si $f=t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$ avec t translation de vecteur non nul $\vec{u}$ directeur d'une droite Δ alors admet des points fixes.

5) Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul et Δ une droite alors $t_{\vec{u}}\circ S_\Delta$ est une symétrie glissante.

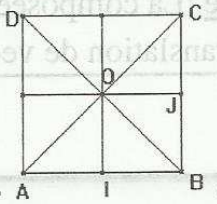
6) soient A et B deux points distincts, f déplacement qui transforme A en B et g un antidéplacement qui envoie A sur B alors $f\circ g^{-1}$ est une symétrie orthogonale..

7) f: M(Z)→ M'(Z') tel que $Z'=\overline{Z}+1$ est une symétrie orthogonale.

8) f une symétrie glissante d'axe Δ alors le lieu des milieux des segments [M, f(M)] est la droite Δ.

Exercice 2 Cocher la réponse exacte :

Soit ABCD un carré de centre O, I =A*B, J =B*C.



1) $R_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(DB)} =$ est :

a) $R_{\left(O;\frac{\pi}{4}\right)}$	b) $S_{(OJ)}$	c) $t_{\overline{BC}} \circ S_{(OI)}$

2) $t_{\overline{BC}} \circ S_{(OI)}$ est:

a) Une rotation	b) une symétrie orthogonale	c) une symétrie glissante

3) $S_A \circ S_B$ est:

a) $t_{2\overline{AB}}$	b) S_I	c) $t_{2\overline{BA}}$

4) f un déplacement qui fixe A et B alors f est:

a) IdP	b) rotation d'angle non nul	c) une symétrie glissante

5) soit Δ une droite passant par O alors l'application $s_\Delta \circ R_{\left(O;\frac{\pi}{3}\right)}$ est une :

a) symétrie orthogonale	b) une rotation	c) une symétrie glissante

6) Le nombres des isométries qui transforment [AB] en [CD] est:

a) 0	b) 2	c) 4

7) Le nombre des isométries qui transforment A en B et I en J est:

a) 1	b) 2	c) 0

8) La composée de deux symétries glissantes d'axes perpendiculaires est une :

a) une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$	b) une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$	c) symétrie centrale

9) La composée de deux symétries glissantes d'axes parallèles est une :

a) une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$	b) une translation	c) symétrie centrale

Exercice 3 : Soit IBC un triangle du plan orienté

R_1 la rotation de centre I, d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}\right)$; R_2 la rotation de centre C, d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB}}\right)$

R_3 la rotation de centre B, d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}}\right)$; Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les bissectrices intérieures respectives des angles géométriques et J le point d'intersection de ces trois droites.

On pose $f = R_3 \circ R_2 \circ R_1$

1)a) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Démontrer que $R_2 \circ R_1 = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

c) Démontrer que f (J) est le point $J_1 = S_{(IB)}$ (J).

2)a) Déterminer le centre Ω de f.

b) Démontrer que (IB) est tangente en Ω au cercle inscrit au triangle IBC.

Exercice 4 : Soit ABCD un carré de centre O, tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On pose I = A*B, G = B*C.

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D, caractériser f.

2) Soit E le point tel que DBE est un triangle équilatéral directe ($\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$).

Soit $f_1 = S_{(DE)} \circ S_{(BE)}$, $f_2 = R\left(B, \frac{\pi}{6}\right) \circ R\left(E, \frac{\pi}{3}\right)$ et $f_3 = R\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.

a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_1.

b) Déterminer f_2 (D); Caractériser f_2.

c) Déterminer $f_2 \circ f_3^{-1}(A)$, caractériser $f_2 \circ f_3^{-1}$.

3) Soit M =S_A(B) ; Δ la perpendiculaire à (AC) en A qui coupe (BC) en M_1.

a)Déterminer les images des droites (MD) et (AB) par f_3 et en déduire que f_3(M) =M_1.

b)Soit M_2 =f_2(M), déterminer $f_2 \circ f_3^{-1}(M_1)$ puis en déduire la nature de ABM_2M_1.

4) Soit : $g = t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(OA)}$ En décomposant $t_{\overrightarrow{AM_1}}$ en des symétries orthogonales convenables, montrer que g est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

Exercice 5 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, à tout point M d'affixe $z \in C \setminus \{1, i\}$ on associe les points $M_1 = R_{\left(A; -\frac{\pi}{6}\right)}(M)$ et $M_2 = R_{\left(B; \frac{\pi}{3}\right)}(M)$

On désignera par z_1l'affixe de M_1 et par z_2 l'affixe de M_2.

1)a) Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z.

b) En déduire que pour tout $z \in C \setminus \{1, i\}$ on a : $\frac{z_2 - i}{z_1 - 1} = i\frac{z - i}{z - 1}$

2) a) Démontrer que pour tout point M distinct de A et B on a: $\left(\overrightarrow{AM_1}; \overrightarrow{BM_2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour que les droites (AM_1) et (BM_2) soient parallèles.

c) Déterminer l'affixe z des points M pour lequel $M_2 = t_{\overrightarrow{AB}}(M_1)$.

3) Monter que M_2 est l'image de M_1 par une rotation que l'on précisera.

Exercice 6: Soit un triangle ABC isocèle et rectangle en A, de sens direct on considère le repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1)Déterminer la transformation complexe associée à la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2)Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$

a)Déterminer la transformation complexe associé à h

b)En déduire la transformation complexe associée à $f = h \circ R$.

c)Prouver que pour tout point M de P\{A} d'image M' par f on a : AMM' est un triangle rectangle en M' 3) Soit M_0 le point d'affixe i et pour tout n de IN on pose M_{n+1} =f(M_n) on désigne par Z_n l'affixe du point M_n.

a) Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n puis déduire Z_n en fonction de n

b) Déterminer la forme des entiers n tel que $M_n \in (\Delta : y = x) \setminus \{A\}$.

Exercice 7: on donne un parallélogramme ABCD de centre O. On construit les triangles isocèles DCF et BEC tels que $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) Soit R la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $t = t_{\overrightarrow{EC}}$; on pose $f = R \circ t$

a) quelle est la nature de f?

b) Déterminer f(E)
c) Soit G le symétrique de E par rapport à O. Montrer que R(G) =A et f(A) =A
d) Montrer que le triangle AEF est rectangle et isocèle en A.
2) On choisit A comme origine d'un repère orthonormé direct.
a) Montrer que $Z_C = Z_B + Z_D$.
b) Déterminer l'expression complexe de R.
c) Soit R' la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
(i) Déterminer l'expression de complexe de R'.
(ii) Montrer que $Z_E = iZ_D + Z_B$.
d)Montrer que $Z_F = -iZ_E$
e)Démontrer une autre fois que le triangle AEF est rectangle et isocèle en A.

Exercice 8: Le plan est munit d'un repère orthonormé, α étant un réel, on considère l'application f_α de P qui à tout point M d'affixe Z associer le point M' d'affixe $Z' = e^{i\alpha}Z + 3(1-e^{i\alpha})$.

1) Déterminer selon α, l'ensemble des points invariants par f_α.
2) a) Déterminer α pour que f soit une translation.
b) déterminer α pour que f soit une rotation.
3) Soit B_0 le point d'affixe 6, on note $B_1 = f_{\frac{\pi}{2}}(B_0)$, $B_2 = f_{\frac{\pi}{4}}(B_1)$ et pour tout n de IN*, $B_n = f_{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}(B_{n-1})$
.Montrer par récurrence que pour tout n de IN* $B_n = f_{\pi\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}(B_0)$.
4) Trouver les coordonnées $(X_n; Y_n)$ de B_n en fonction de n.
5) Trouver les limites des suites (X_n) et (Y_n).

Exercice 9: Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note D' =$S_A$(B).
I/ 1) a) Montrer que (OD') est la médiatrice de [BD].
b) Montrer que $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OD'}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
2) Soit R la rotation qui envoie A sur O et B sur D et $f = S_{(OD')} \circ S_{(AD)}$ .On note I le centre R
a-i) Montrer que R à pour angle $\frac{2\pi}{3}$.
ii) Déterminer l'angle de f.
b-* Déterminer (Rof)(D)
* Caractériser Rof
* Vérifier que R =f^{-1}.
c- Montrer que les droites (AD), (OD') et la médiatrice de [OA] sont concourantes en I.
3) a- Montrer que R(D) =D'.
b- Construire le point C' =R(C).
4) a- Soit g =S(OD') o R. Déterminer g(B) ouis caractériser g.
b- Construire G =g(C).
c- Prouver que D' =C'*G.
d- Donner la nature du quadrilatère BOD'G.

Exercice 10 :Soit ABC un triangle équilatéral direct, I =B*C et D =S_I(A).

On pose: $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$; $g = S_1 \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$ *et* $h = S_{(AD)} \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$

1) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

2)a) Déterminer g(B).

b) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle. Soit G le centre de g. Montrer que les points A, B, G et C appartiennent à un même Cercle C. Construire le point G.

3)a) Caractériser l'application $f \circ g^{-1}$

b) Pour tout point M du plan, on note M_1 =f(M) et M_2 =g(M).Montrer que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe lorsque M décrit le plan P\{C}.

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels on a: M_1M_2 = AD.

4)a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Trouver la forme réduite de h.

5)Soit $\Omega = S_{(AC)}(B)$ et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoie A sur C. On note E =r(B).

a)Déterminer le centre de r et montrer que C =A*E.

b) Soit $N \in [AB] \backslash \{A, B\}$ tel que AN = CN'. Montrer que le triangle $\Omega NN'$ est équilatéral.

Exercice 11 : On considère un rectangle ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$,

on note I =A*B , J =C*D ,E=D*A et F=C*B.

Soit f l'antidéplacement tel que f(A) =C et f(D) =B. On pose g =fo$S_{(AD)}$

a)Déterminer g(A) et g(D) puis caractériser g.

b) Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

Exercice 12 : On considère dans un plan orienté un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose I =B*C, J =C*A et K =A*B

Soit f une isométrie du plan tel que f(A) =B, f(J) =K et f(I) =I

1) a) Montrer que f(C) =A

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f (Par trois méthodes)

2) Soit E =S_K(I).

a) Montrer qu'il existe une unique isométrie h tel que h(A) =B, h(C) =A et h(I) =E.

c) Montrer par deux méthodes que $h = t_{\overrightarrow{IB}} \circ S_{(KJ)}$.

3) Soit M un point du plan $f(M) = M_1$ et $h(M) = M_2$. Monter que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 13 : Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on pose I =A*B et J =B*C.

1) Caractériser les applications suivantes: $f_1 = S_{(OC)} \circ S_{(OJ)}$ *et* $f_2 = S_{(OJ)} \circ S_{(AB)}$

2) Soit g l'antidéplacement qui transforme A en B et I en J.

a) Déterminer g(B).

b) déterminer $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}(J)$ *et* $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}(O)$;En déduire la nature de $g \circ t_{\overrightarrow{OA}}$

c)Donner alors la forme réduite de g.

3) Déterminer toutes les isométries qui transforment A en B et I en J.

Exercice 14 : Soit ABC un triangle équilatéral de centre O tel que :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi], I=B*C, J=A*B, K=A*C$ et $O'=S_{(AB)}(O)$.

1) Montrer que AOBO' est un losange de centre J et que les droites (BO') et (BC) sont perpendiculaires.

2) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que f(B) =C et f(O') =O.

b) Préciser l'angle de f. En déduire que f est une rotation dont on précisera le centre.

3) Soit $g=t_{\overrightarrow{CB}}\circ f$.

a) Vérifier que $f=S_{(AI)}\circ S_{(AB)}$.

En déduire que g est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

4) Soit φ l'antidéplacement tel que $\varphi(B)=C$ et $\varphi(O')=O$.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante d'axe Δ médiatrice de [BK].

b)Soit $\vec{u}$ le vecteur de φ .Déterminer $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(K)$. En déduire le vecteur $\vec{u}$.

5) Soit $\{\Omega\}=(BK)\cap(IJ)$ et $h=S_{\Omega}\circ\varphi$.

a) Vérifier que $S_{\Omega}=S_{(BK)}\circ S_{(IJ)}$.

b) En déduire que h est la symétrie orthogonale d'axe la droite D=med[AK].

6) Soit M un point du plan; On pose f(M) =M_1 et , Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

Exercice 15 : On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et D=$S_{(AC)}$(B).

1) Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ tel que r(A) =C;

a) Montrer que D est le centre de r.

b) Soit B' =r(B), Montrer que le point C est le milieu du segment [AB].

2) Soit K un point de la demi-droite [AB) et K' le point de [CB') tel que AK =CK'. Montrer que le triangle DKK' est équilatéral.

3) On désigne par E et O les milieux respectifs des segments [BB'] et [AC].

a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme A en C et B en B'.

b) Montrer que f est une symétrie glissante.

c) Montrer que f(D) =B puis caractériser f.

d) Soit I le milieu du segment [KK'], Montrer que les points O, I et E sont alignés.

4) déterminer l'ensembles des points M du plan tel que f(M) =r)M).

5) Caractériser l'application $g=r\left(C,\frac{\pi}{3}\right)\circ r\left(D,\frac{\pi}{3}\right)$.

6) Pour tout point N du plan on note $N_1=r\left(D,\frac{-\pi}{3}\right)(N)$ et $N_2=r\left(C,\frac{2\pi}{3}\right)(N)$.

a) Montrer que le milieu du segment [N_1N_2] est un point fixe que l'on précisera.

b) Déterminer l'ensemble des points N du plan pour lesquels on a: N_1N_2 =AC.

7) On considère l'application $\varphi=S_{(CE)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(EC)}\circ S_{(CB')}$ .Déterminer $\varphi(B')$ puis caractériser φ .

Exercice 16 : Dans un plan P orienté, on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par J et K les milieux respectifs de [AD] et [CD].

Soit E le point de P tel que le triangle DBE est équilatéral de sens direct.

1) On pose $\psi = t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{(AC)}$

a- Déterminer $\psi(A)$ *et* $\psi(D)$.

b- En déduire que ψ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

2) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme B en A et A en D.

b- Caractériser R.

3) Soit l'application $g = R_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)}\circ R_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}$ .Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4) Soit f la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $T = g\circ f^{-1}$. Déterminer le point T(A) puis caractériser l'application T.

5) Soit M un point de P, on pose M_1 =f(M) et M_2 =g(M)

a- Quel est la nature du quadrilatère ABM_2M_1?.

b- Montrer qu'il existe un seul antidéplacement φ qui envoi A sur M_1 et D sur M_2.

c- Comparer φ et $t_{\overrightarrow{AM_1}}\circ S_{(AI)}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ dans chacun des cas suivantes:

* M appartient à la droite (BD).

** M appartient à la parallèle à (AC) passant par D.

Exercice 17 : Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, soit l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe Z on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = -i\overline{Z}+1$

1) Montrer que f est une symétrie glissante.

2) Montrer que fof est une translation dont on déterminera le vecteur. Caractériser alors f.

Exercice 18 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'application f de P dans P qui à tout point M(x; y) on fait correspondre le point M'(x'; y') définie par: $\begin{cases}x' = y\\ y' = x+3\end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie plane.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3) Montrer que f est un antidéplacement.
4) Déduire la forme réduite de f.

Exercice 19 : Soit f l'application du plan qui à tout point M(Z) associe le point M' tel que $Z' = \overline{Z}+2i$.

1) Montrer que f est une isométrie et la caractériser.

2) Soit les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectifs: $\Delta_1 : y = -2x$ *et* $\Delta_2 : y = 2x+2$.

Montrer que $\Delta_1\cup\Delta_2$ est globalement invariant par f.

Exercice 20 : Dans un plan orienté, on considère un carré ABCD tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I=A*B; J=A*D et O le centre du carré.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) =D et f(I) =J.

b) En déduire que f est une rotation de centre O dont on précisera l'angle.

2) Soit g l'antidéplacement tel que g(A) =D et g(I) =J.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Vérifier que: $g = f \circ S_{(AI)}$

c) On déduire que l'isométrie $t = S_{(IJ)} \circ f \circ S_{(AI)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

3) a) Caractériser l'isométrie $\varphi = g^{-1} \circ f$.

b) Trouver l'ensemble (δ) des points M tel que f(M) =g(M). En déduire g(B).

4) On suppose que $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan P.

a) Déterminer la transformation complexe associé à f.

b) En déduire que la transformation complexe associé à g est de la forme: $Z' = i(-\overline{Z} + 2)$

5) On considère la suite des points (M_n) définie par: M_0=A et $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(M_n) = M_{n+1}$ où g est l'application définie dans la question 2.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a\ \overrightarrow{AM}_{2n} = 2n.\overrightarrow{IJ}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, M_{2n+1} appartient à la droite fixe que l'on déterminera.

Exercice 21 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$.

1) a- Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b- En déduire la résolution de (E).

2) soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct du plan P; A ,B et C les points d'affixe respectives $z_A = -1$; $z_B = 1 - i$ *et* $z_C = 2 + i$.

a- Déterminer l'affixe de B' tel que: $B' = R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}(B)$.

b- Montrer que ABCB' est un carré.

3) Soit f l'antidéplacement tel que f(A) =C et f(B) =B' et soit I le centre du carré ABCB'.

a- Montrer que $f = S_I \circ S_{(AB)}$.

b- En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite.

4) soit $g : P \to P$, $M(z) \mapsto M(z)$ *tel que* $Z' = i\overline{Z} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$

a- Montrer que g est une isométrie.

b- Soit E et F deux points d'affixes respectifs $\frac{5}{2}$ et $2 - \frac{1}{2}i$. Déterminer g(E) et g(F).

c- En déduire la nature de g.

Exercice 22 : Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, I =A*D , K=A*B, et L=B*C.

1) Soit $f = R_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_A$. Caractériser f

2) Montrer qu'il existe un unique déplacement g du plan dans lui même tel que g(A) =B et g(B) =C. Caractériser g.

3) Montrer que f et g coïncident en un seul point que l'on déterminera.

4) Trouver l'unique antidéplacement h du plan tel que h(A) =B et h(B) =C.

5) On prend comme repère $R=\left(O,\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$.

a- On se propose de déterminer la nature de f d'une autre façon:
Soient M(z) et M'(z') tel que M' =f(M). Trouver z' en fonction de z En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

b- Soit $\varphi:\ P\to P$, $M(z)\mapsto M'(z')\ tel\ que\ z'=i\,\bar{z}+i+1$ Montrer que φ est une isométrie qui n'a pas de points invariants. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

c- Trouver $g\circ h(A)\ et\ g\circ h(B)$ en déduire que $g\circ h=\varphi$.

d- Montrer que φ est la composée de trois symétries orthogonales que l'on précisera.

6) Trouver tous les isométries du plan qui transforme {A, B} en {B, C}.

Exercice 23 :Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère la droite $\Delta: 2x-y+1=0$ et le vecteur $\vec{v}\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{v}$.

Exercice 24 :Dans le plan P orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points distincts A , B et C d'affixes respectives a , b et $-b$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par a et b pour que les points A , b et C soient alignés.

2) Sur les droites $(AB)\ et\ (AC)$, à l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés AFGB et ACDE de façon que $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)\ et\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$ soient de sens direct.

a) En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E, montrer que l'affixe du point E est $e=-ib+a(1-i)$

b) Calculer les affixes f, h et d des points F , H et D en fonction de a et de b.

3) En déduire que :a) $FE=2OA$ et que $(OA)\perp(EF)$ b) $BD=CH$ et que $(BD)\perp(CH)$

Exercice25 : Dans le plan P , on donne un triangle rectangle et isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]; K=B*C; I=A*B$ et $J=A*C$

1) Soit φ une isométrie du plan vérifiant $\varphi(B)=C$ et $\varphi(C)=B$

a) Montrer que $\varphi(K)=K$; en déduire que $\varphi\langle(AK)\rangle=(AK)$

b) Montrer que $\varphi(A)\in(AK)\cap\zeta$; ou ζ est le cercle de diamètre $[BC]$

c) Déterminer alors toutes les isométries du plan vérifiant $\varphi(B)=C$ et $\varphi(C)=B$

2) On suppose que $\varphi(A)=A'\neq A$ et $B'=S_B(A)$

a) Vérifier que ABA'C est carré

b) Montrer qu'il existe un seul déplacement R_1 vérifiant $R_1(B')=A'$ et $R_1(A')=A$

c) Vérifier que $R_1=r_{\left(B,\frac{\pi}{2}\right)}$: rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ Puis montrer que $R_1\circ\varphi=r_{(A,-\frac{\pi}{2})}$: rotation de

centre A et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$

3) Soit $f = r_{(K,\frac{\pi}{2})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{2})}$ et $g = \left[r_{(K,\frac{\pi}{2})}\right]^{-1} \circ r_{(A,\frac{\pi}{2})}$

a) Déterminer f(B) et g(B). b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et g

4) Montrer que $foS_{(AB)}$ et $goS_{(AB)}$ sont deux symétrie orthogonales que l'on précisera

Exercice 26 : Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral OAB de sens direct. On désigne par O' le symétrique de O par rapport à la droite (AB) et par I le milieu du segment [AB].

1) a- Quel est la nature du quadrilatère OAO'B?. b- On pose $f = S_{(OI)} \circ R_{(O,\frac{\pi}{3})}$. Caractériser *f*.

c- On pose $h = t_{\overrightarrow{OB}} \circ R_{(A,\frac{\pi}{3})}$. Caractériser h.

2) a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que: g(A) =B et g(O) =O'.

b- Montrer que g n'admet pas de point invariant.

c- On pose H =g(I).Montrer que le triangle O'HB est rectangle en H; Construire alors le point H.

d- En déduire la forme réduite de g.

3) On pose $\varphi = S_{(AB)} \circ R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$ a- Montrer que $g = \varphi$. b- En déduire que $g = S_I \circ S_{(OA)}$

4) La droite (IH) coupe (AO) en K et on désigne par H' le milieu de [OB].

a- Montrer que (BO') est la médiatrice du segment [IH].

b- En décomposant S_I en symétries orthogonales, d'axes convenablement choisis, retrouver la forme réduite de g.

Exercice 27 : On donne dans le plan orienté P un triangle ABC équilatéral de sens direct inscrit dans un cercle (C) de centre O.

On désigne par I le milieu de [BC], D =S_O(A) et K le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (BC) passant par O.

1) Montrer que AO =BD et que I le milieux de [OD].

2) Soit f une isométrie de P tel que f(A) =D et f(O) =B. On pose $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$.

a- Déterminer g(O) et g(A).En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

b- Montrer que l'on à: $f = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}$ ou $f = R_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

3) Dans cette question, on suppose que le cercle (C) est de rayon 1 et on munit le plan P du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}\right)$.

a- Déterminer les affixes des points A, B et C.

b- Déterminer la forme complexe de chacun des isométries: $f_1 = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(BO)}$ *et* $f_2 = R_{\left(K,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

c- Montrer que $f_1\left(\{A,B,C\}\right) = f_2\left(\{A,B,C\}\right)$.

d- Déterminer l'ensemble des points M de P qui vérifient: $f_1(M) = f_2(M)$

i) analytiquement ii) En considérant $f_2^{-1} \circ f_1$.

Exercice 28 :On considère un triangle ABC. Les symétries S_1, S_2 et S_3 d'axes respectifs (BC), (CA) et (AB). On se propose d'étudier l'application: $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

On désigne par I, J et K les pieds des hauteurs du triangle ABC issus respectivement de A, B et C et par h l'orthocentre du triangle ABC. 1)a) Démontrer que f est un antidéplacement.

b)Soit S une symétrie orthogonale. Démontrer que les applications $S_3 \circ S_2$ *et* $S_2 \circ S_1$ sont distinctes. En déduire que f n'est pas une symétrie orthogonale.

2)a)Démontrer les égalités: $2\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IK}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HK}\right)[2\pi]$ et $2\left(\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{HC}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IC}\right)[2\pi]$

b) En déduire que $2\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IK}\right) \equiv -2\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{IJ}\right)[2\pi]$. Quelle est l'image de (IK) par S_I?

c) Montrer que la droite (IK) est globalement invariante par f.

3) On désigne par I' =f(I).Démontrer l'égalité AI' =AI et en déduire une construction de I'.

4) Démontrer que $f = t_{\overrightarrow{II'}} \circ S_{(IK)}$ .Construire l'image du triangle ABC par f.

Exercice 29 :Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta): z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0,2\pi]$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) ; On notera z_1 et z_2 les solutions de (E_θ).

2) On pose $Z = z_1 + z_2$.

a) Ecrire Z sous forme trigonométrique. b) En déduire les valeurs de : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; On désigne par I ; M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $(-1+i)$; $(e^{i\theta})$ et $(ie^{i\theta})$, $\theta \in [0,2\pi]$.

3) a) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les points I ; M_1 et M_2 sont alignés.

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{u,\overrightarrow{M_1M_2}}\right) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

c) En déduire les valeurs de θ pour que la droite (M_1M_2) soit parallèle à l'axe des réels.

4) a) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une rotation R_1 dont on précisera le centre et l'angle.

b)Soit R_2 la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et telle que $R_2(A) = I$ où $A(-1)$ .Déterminer la forme complexe de R_2.

c) Déterminer la nature de l'application $R_2 \circ R_1$ et la caractériser

Exercice 30 : Dans le P orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par J le symétrique de I par rapport à (BC) .

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement r qui envoie B en C et C en D ; caractériser r.

2)soit $f = roS_{(IJ)}$ et $g = t_{\overrightarrow{IJ}} or^{-1}$ .a)Déterminer f (B) et f (C) puis caractérisé f

b)Déterminer g(I) puis déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques .

3)Soit l'antidéplacement h défini par h(D)=B et h(I)=J

Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera la forme réduite.

4)Soit $E = \{M \in P \text{ tel que } h(M) = g(M)\}$ Montrer que $(M \in E) \Leftrightarrow (f(M) = M)$ et en déduire l'ensemble E

5) On donne AB=1 et on considère le repère $R\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ a)Déterminer l'expression complexe de g

b)Déterminer les affixes de I et J

c)On donne l'application φ définie de P dans P qui à tout point d'affixe z associes le point M' d'affixe z' telle que $z' = \overline{z} + 1 + i$, prouver que φ est un antidéplacement et que $\varphi = h$

d) retrouver l'ensemble E et le comparer avec les résultat de 4).

Exercice 31 : On donne dans le plan orienté P un triangle ABC isocèle en A N coupe (AB) en M et (AC) en M'.

tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .Soit N un point de la droite (BC) distinct de C. La parallèle à (AB) passant par

1) a- Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui envoie A en C et M en M'.

b- Montrer que f(B) =A. c- Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O.

2) Soit C' =f(C). Montrer que le point C' appartient au cercle circonscrit au triangle ABC et que les droites (AC) et (BC') sont parallèles.

3) On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [BC], [CC'] , [C'A] et [AB].

Soit g l'antidéplacement qui envoie B en A et C en C'.

a)Montrer que g est une symétrie glissante et préciser son axe Δ.

b)Montrer que $I \in \Delta$. En déduire la forme réduite de g. c)Soit A' =g(A). Montrer que A' $=S_{(AC')}$(C).

4)a- Caractériser la transformation $h = g \circ S_{(AC)}$.

b- Montrer que lorsque N varie sur la droite (BC), le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est constant.

Exercice 32 : On donne, dans un plan orienté P, un triangle ABC quelconque inscrit dans un cercle ζ de centre O.On désigne par G son centre de gravité et par I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].On construire les triangles OIA' , OJB' et OKC' rectangle en O, de sens direct et tel que:

OA' =2OI , OB' =2OJ et OC' =2OK.

1) a- Montrer que: $\left(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)[2\pi]$. b- En déduire que: A'B' =2IJ.

2) Montrer qu'il existe une seule isométrie f du plan qui vérifie: f(A) =A' , f(B) =B' et f(C) =C'

3) On se propose de déterminer f.

On munit le plan P d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, O étant le centre du cercle ζ et on désigne par z_M l'affixe d'un point M de P.

a)Montrer que: $z_{A'} = 2iz_I$, $z_{B'} = 2iz_J$ et $C' = 2iz_K$. b)Exprimer alors $z_{A'}$ en fonction de z_A et z_G.

c) Soit l'application: $g : P \longrightarrow P; M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que } : z' = -iz + 3iz_G$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

d) Montrer que f =g.

4) Quelle condition doit vérifier le triangle ABC pour que le cercle ζ soit invariant par f ?

Exercice 33: Dans le plan oriente, on considère un losange ABCD de centre O tel que :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .On note I, J et k les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[AD]$

1)a) Identifier les deux isométries $R = S_{(DC)} o S_{(DJ)}$ et $T = S_{(OJ)} o S_{(DC)}$

b) Montrer que $f = T o R$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle

2) Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$ tel que AM = BN et Q le point tel que IDNQ est un parallélogramme

a)Préciser R(M) en déduire que f(M) = Q .b) Donner la nature du triangle JMQ

3) Soit g l'isométrie du plan tel que g(A) = D, g(B) = C et g(D) = B

a)Montrer que g est un antidéplacement. b) Montrer que $g(O)=J$ et $g(K)=O$ puis identifier $t_{\overrightarrow{JO}} o g$

c) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur

4) On note $h=R^{-1} o g$ et $\varphi=S_{(AD)} o R^{-1} o g$].Déterminer h(B) et h(K) puis identifier h et φ.

Exercice34 : Le plan est oriente dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$.On désigne par O le milieu du segment $[BC]$ et par I le barycentre des points pondérés $(A,\sqrt{2})$ et $(B,1)$.

1)a) Montrer que $AI=AC$. b) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que $f(C)=I$ et $f(I)=B$.

c) Prouver que f est une rotation, préciser son angle et construire son centre Ω.

d) Montrer que Ω appartient au cercle (ς) circonscrit au triangle ABC et que $(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BA})\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$.

2) La parallèle à la droite (AC) passant par ψ recoupe le cercle (ς) en F.

a) Déterminer f $\langle(\Omega A)\rangle$ En déduire que $f(A)=F$. b) Montrer que les points C, I et F sont alignés.

3) Soient Δ_1,Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segment $[\Omega F],[FB]$ et $[BA]$.On note $g=S_{\Delta_3} o S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$

a) Montrer que g est une symétrie orthogonale. b) Déterminer $g(\Omega)$, en déduire que : $S_{\Delta_3} o S_{\Delta_2}=S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes : $\varphi=S_{(CF)} o S_{\Delta_3} o S_{\Delta_2} o S_{(AB)}$ et $\psi=T_{\overrightarrow{(BC)}} o S_{\Delta_3}$

Exercice 35: P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé directe $(o,\vec{u},\vec{v})$ Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z=4i$, $z=4$ et $z=\sqrt{3}+5i$

1/Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels il existe au moins une isométrie f vérifiant f (A)=B et f(C)=M 2/soit $\theta\in[-\pi,\pi]$ et soit D le point d'affixe $z_D=4+2e^{i\theta}$

a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f_0 tel que $f_\theta(A)=B$ et $f_\theta(C)=D$.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle f_θ est une symétrie orthogonale.

3/ On prend $\theta=-\frac{5\pi}{6}$ on note $g=f_\theta$ a)Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Déterminer l'expression de g. c) Déterminer une équation de l'axe Δ de g et l'affixe de son vecteur $\vec{w}$.

Exercice 36 : Le plan est oriente dans le sens direct. Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O et ζ son cercle circonscrit. On désigne par D le symétrique de A par rapport à O et E le milieu de $[AC]$.

I)1) Montrer que $AO=DB$

2) La parallèle à (BC) passant par O coupe (AB) en K .Montrer que les triangles AKD et BKO sont isocèles en K.

3) Soit f le déplacement qui envoie A sur D et O sur B .Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

4) Soit g l'antidéplacement qui envoi A sur D et O sur B .Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur. 5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $f(M)=g(M)$.

II) On désigne par R_1,R_2 et R_3 les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre respectives A, B et C.

1) On pose $h=R_1 o R_2 o R_3$. Déterminer h(A) puis caractériser h.

2) On pose $\varphi = h \circ R_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}$ .Déterminer $\varphi(C)$ puis caractériser φ . 3) Identifier $R_1 \circ \varphi$.

Exercice37 : On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par :

$A' = S_D(A)$, $D' = S_C(D)$ et par $I = A' * C$

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme A' en A et D en B 2) Caractériser l'application R Soit $\varphi = T_{\overrightarrow{AD}} \circ R$

a) Déterminer $\varphi(A')$ et $\varphi(D)$. b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ .

3) Montrer que $\varphi(A) = D'$ et déduire la nature de triangle IAD' .

4) Soit $g = S_{(BD)} \circ \varphi$ .a)Déterminer g(D) et g(A') .b) Déduire que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice 38 : Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .Soit I le point tel que CIA soit un triangle rectangle et isocèle en C et de sens direct.

1)a)Montrer qu'il existe un déplacement unique f tel que f(A)=I et f(B)=(C) .

b) Déterminer l'angle de f .En déduire que f est une rotation .Construire son centre O.

2) Montrer que OBAC est un losange.

3) On pose $g = S_{(oc)} \circ f$. a) Déterminer g(A) et g(B) . b) Caractériser alors g.

4) Soit Δ la perpendiculaire à (BC) en B et H le projeté orthogonale sur (OC). On pose $h = f \circ S_\Delta$

a) Montrer que h est une symétrie glissante. b) Montrer que $h = S_{(OC)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ .c) Déterminer alors la forme réduite de h .

Exercice 39 : Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $2+2i$; $2-2i$; $-2-2i$ *et* 4 .

1) Soient a et b deux réels tel que $a+b=4$.

On considère les points M et N d'affixes respectives *a* et *bi* et on construit le carré MQNR de diagonal [MN] tel que $\left(\overrightarrow{QN},\overrightarrow{QM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Calculer l'affixe du point Q. En déduire que la position de Q est indépendante du choix de *a* et *b*.

b-Soit I le milieu du segment [MN]. Montrer que, lorsque *a* et *b* varient, le point I décrit une droite Δ dont on donnera une équation cartésienne.

2) Soit f la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a- Donner la forme complexe de f. b- Déterminer le points f(A) et f(D).

3) On pose $g = f \circ S$ où S est la symétrie orthogonale d'axe la droite des abscisses.

a- Soit M un point d'affixe z et soit z' l'affixe du point M' =g(M).Montrer que: $z' = i\overline{z} - 4i$.

b- Montrer que g est une isométrie n'ayant aucun point invariant.

c- Soit $h = t_{\overrightarrow{OC}} \circ S_\Delta$ ou Δ est la médiatrice du segment [OB].Déterminer h(A) ; h(B) et h(D).

En déduire que $g = t_{\overrightarrow{OC}} \circ S_\Delta$.

Devoir de contrôle N° 1 (Exemple 1)

Exercice N° 1 : Répondre par « Vrai » ou « Faux »

1) La suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{n+1}$ est convergente.

2) Soit $n \in IN^*$ et $k \in \{1;2;....;n\}$, On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ et on suppose que $\dfrac{k}{2n^2+1} \le U_k \le \dfrac{k}{2n^2}$ alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$

B) Cocher la réponse exacte :

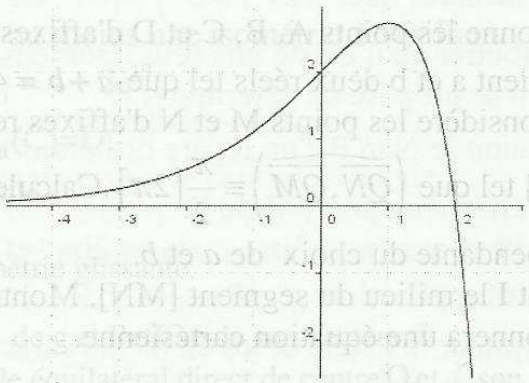
1) L'ensemble des points M d'affixe $z = 1+2e^{3i\theta}$ avec $\theta \in \left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ est :

a) un cercle b) un segment de droite c) un demi cercle

2) Les images des racines huitièmes de $-1+7i$ sont :

a) un cercle trigonométrique b) alignés c) symétriques 2 à 2 par rapport à l'origine

3) Soit la fonction définie sur IR ayant pour courbe (C_f) à pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ alors



a) i) gof est continue sur IR^*

ii) gof est continue sur $IR - \{2\}$

iii)gof est continue sur IR_+

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} gof(x) =$ i) $-\infty$ ii) 0 iii) $+\infty$

Exercice N° 2 : Soit la fonction f définie sur $IR \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x-1} \text{ si } x \in IR_+^* \setminus \{1\} \\ f(x) = \sqrt{x^2-2x} + x \text{ si } x \le 0 \end{cases}$$

1)a) Encadrer f(x) pour tout $x \in]0,1[$.

b) Montrer alors que f est continue en 0.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) On pose $U(x)=\frac{\pi(x-1)}{x}$, $V(x)=\frac{\sin x}{x}$ et $w(x)=\frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour $x\in IR_+^*\setminus\{1\}$.

a) Vérifier que pour $x\in IR_+^*\setminus\{1\}$, $f(x)=W(x)VoU(x)$.

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1.

c) A l'aide de g, montrer que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle $]1,2[$ une solution α.

Exercice N° 3 :

On considère la suite (F_n) définie par : $F_0=1, F_1=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. On notera que la troisième information signifie que tout terme de la suite (à partir du troisième) est égal à la somme des deux termes qui le précédent.

Pour l'information, F_n représente l'effectif de la population des ancêtres de nième génération d'une abeille mâle.

1) Démontrer, par récurrence, que $F_n\geq n\ \forall n\in\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire à propos de la limite de la suite (F_n) ?

2) Démontrer par récurrence que $F_n\times F_{n+2}=F_{n+1}^2+(-1)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) Pour la suite de l'exercice, on considère les suites $(\varphi_n),(u_n)$ et (v_n) définies par les égalités :

$\varphi_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$, $u_n=\varphi_{2n}$ et $v_n=\varphi_{2n+1}$.

a) Déterminer une écriture fractionnaire de $\varphi_{n+1}-\varphi_n$. En déduire que $\varphi_{n+2}-\varphi_n=\frac{(-1)^n}{F_n\times F_{n+2}}$.

b) Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

c) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (φ_n) converge.

d) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\left({\varphi_n}^2-\varphi_n-1\right)=0$.

e) En déduire la valeur de la limite de la suite (φ_n).

Exercice N° 4 :

le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et I le milieu de [AB]. On considère l'application f de $P/\{I\}$ dans P qui à tout qui à tout point M d'affixe $z\neq\frac{1+i}{2}$ associe le point M' d'affixe $z'=\frac{z^2-i}{2z-(1+i)}$

1) a) Montrer que A et B sont les seuls points invariants par f.

b) Préciser les affixes des antécédents du point I par f.

2) a) Soit $z\in\mathbb{C}/\left\{1,\frac{1+i}{2}\right\}$. Montrer que $\frac{z'-i}{z'-1}=\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^2$

b) En déduire que pour tout point $M \in P/\{A,B,I\}$ On a $\frac{BM'}{AM'} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$ et que

$\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)[2\pi]$

c) Sur quel ensemble se déplace le point M' lorsque M se déplace sur le cercle de diamètre $[AB]/\{A,B\}$

3) Soit Δ la médiatrice de segment $[AB]$. On suppose que M est un point de $\Delta/\{I\}$.

a) Vérifier que $M' \in \Delta$

b) Construire le point M'à l'aide d'un point M de $\Delta/\{I\}$

Exercice N° 5 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 2\sqrt{3}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$; $\theta \in [0;\pi]$.

2) Mettre les solutions sous la forme exponentielle.

3) le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)e^{i\theta}$ et $z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)e^{i\theta}$,

a) Montrer que les points M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

c) En déduire que OM_1M_2 est un triangle équilatéral.

4) a) Montrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Déterminer θ pour que la droite (M_1M_2) soit parallèle à la droite d'équation $y = -x$

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^4 - 2\sqrt{3}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)z^2 + i = 0$

Devoir de contrôle N° 1 (Exemple 2)

Exercice N° 1 :

A) Répondre par « Vrai » ou « Faux »

1) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{1-(-1)^n n}{(-1)^n + n}$; $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. La suite (U_n) est convergente.

2) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ alors (U_n) est convergente.

3) Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :

x	3	6
f(x)	1 ↗	5

Si (U_n) est la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ alors (U_n) est croissante

B) Cocher la réponse exacte :

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2mz - 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1;1\}$; on désigne par z' et z'' les solutions de (E) alors :

a) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv 0[2\pi]$ b) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \pi[2\pi]$ c) $\arg(z') + \arg(z'') \equiv \arg(m)[2\pi]$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$ est : a) $+\infty$; b) 1 ; c) n'admet pas de limite.

3) Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec a et b deux réels tels que $a < b \Rightarrow$

a) f est bornée sur $]a,b[$ b) l'image par f de $]a,b[$ est un intervalle de même nature

c) f est continue sur tout intervalle contenu dans $]a,b[$

Exercice N° 2 :

A) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de g.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

3) Montrer que g est impaire.

4) Etudier la dérivabilité de g en 0 et à droite en 1.

5) Dresser le tableau de variation de g.

B) Soit $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \; si\; x\in\mathbb{R}\setminus[0,1] \\ f(x)=g(x) \; si\; x\in[0,1] \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0.

3) Déterminer f'(x) lorsque $x\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

C) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

1) a) Montrer que l'équation $\cos x-\frac{2}{\pi}=0$ admet une seule solution x_0 dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Donner le tableau de variation de la fonction φ définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$.

En déduire que $\frac{2}{\pi}x\le\sin x \;\; \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice N° 3 : Soit (a_n) *et* (b_n) les deux suites réelles définies par $\begin{cases} a_0=1\,,\,b_0=2 \\ a_n b_n=2 \text{ et } b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$

1) a) Calculer b_1 *et* a_1 puis b_2 *et* a_2.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0<a_n<b_n$

2) a) Montrer que (b_n) est décroissante et que (a_n) est croissante.

b) En déduire que les deux suites (a_n) *et* (b_n) sont convergentes.

3) a) Montrer que $0<b_{n+1}-a_{n+1}\le\frac{1}{2}(b_n-a_n)\;\forall n\in\mathbb{N}$ et que $0<b_n-a_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Montrer, alors, que (a_n) *et* (b_n) convergent vers une même limite. Conclure.

4) On pose (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n=\frac{n}{2^n}$.

a) Etudier la monotonie de (x_n), en déduire qu'elle est convergente.

b) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\; x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2^{n+1}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

c) Soit (y_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $y_n=n(b_n-a_n)$. Montrer que (y_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice N° 4 : Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne le point $A(i)$, soit l'application $f : P \to P\ ;\ M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = (1-i)z - 1$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = \sqrt{2}$.

2) Soit M un point distinct de A et $M' = f(M)$.

a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle et isocèle en M.

b) Déterminer une mesure orientée de l'angle $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})$.

c) En déduire une construction de point $M' = f(M)$.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\arg(z') \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice N° 5 : Soit l'équation $(E) : z^2 - 2(1+i\cos\theta)z + 2i\cos\theta = 0\ ;\ \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1; $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$; $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$.

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

c) On pose $I = M_1 * M_2$. Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque θ décrit l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

3) a) Ecrire $\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ sous forme exponentielle et en déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation que l'on précisera.

b) Déterminer θ pour que AM_1M_2 soit un triangle isocèle.

4) a) Montrer que lorsque θ varie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, la droite (M_1M_2) à une direction fixe.

b) Prouver donc que $M_2 = S_\Delta(M_1)$ avec $\Delta : x = 1$

c) Déterminer θ pour que OAM_2M_1 soit un losange.

Devoir de synthèse N° 1 (Exemple 1)

Exercice N° 1 : Pour chaque question une seule des trois propositions a, b et c est exacte, laquelle ?

1) Un déplacement qui fixe deux points distincts est :

a) Une translation de vecteur non nul	b) Une rotation d'angle non nul	c) L'identité du plan

2) Δ une droite passant par un point O, alors l'application $S_{\Delta} \circ R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$ est :

a) Une symétrie orthogonale	b) Une rotation	c) Une symétrie glissante

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1-\frac{1}{n} \leq U_n \leq 1-\frac{1}{n+1}$ alors la suite (U_n) est :

a) croissante ; b) décroissante ; c) ni croissante ni décroissante.

4) ξ et ξ' sont les courbes représentatives des fonction f et f^{-1} dans un repère orthonormé, f et f^{-1} étant dérivables sur IR, la tangente à ξ en $M(-3;4)$ a pour coefficient directeur 2 alors la tangente à ξ' en $M'(4;-3)$ à pour coefficient directeur :

a) 2	b) -2	c) $\frac{1}{2}$

Exercice N°2: Dans un plan orienté, on considère un carré ABCD tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I=A*B; J=A*D et O le centre du carré.

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) =D et f(I) =J.

b) En déduire que f est une rotation de centre O dont on précisera l'angle.

2) Soit g l'antidéplacement tel que g(A) =D et g(I) =J.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Vérifier que: $g = f \circ S_{(AI)}$

c) On déduire que l'isométrie $t = S_{(IJ)} \circ f \circ S_{(AI)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

3) a) Caractériser l'isométrie $\varphi = g^{-1} \circ f$.

b) Trouver l'ensemble (δ) des points M tel que f(M) =g(M). En déduire g(B).

4) On suppose que $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan P.

a) Déterminer la transformation complexe associé à f.

b) En déduire que la transformation complexe associé à g est de la forme: $Z' = i(-\overline{Z} + 2)$

5) On considère la suite des points (M_n) définit par: M_0=A et $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(M_n) = M_{n+1}$ ou' g est l'application définie dans la question 2.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\overrightarrow{AM}_{2n} = 2n.\overrightarrow{IJ}$.

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, M_{2n+1} appartient à la droite fixe que l'on déterminera

Exercice N° 3 : Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+1$, On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $\forall\ x\in IR\ ;\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) Au point I. c) Tracer (T) et (C).

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur $]0\ ;\ 2[$.

b) Montrer que $\forall\ x\in]0\ ;\ 2[\ ;\ f^{-1}(x)=\dfrac{2(x-1)}{2x-x^2}$

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

B) Soit F la fonction définie sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $\begin{cases}F(x)=f(tg\,x) & si\ \ x\in\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\end{cases}$

1) a) Montrer que F est continue sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$ .b) Calculer $F(x)\ \ \forall\ x\in\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$

2) a)Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} définie sur $[1\ ;\ 2]$

b) Montrer que F^{-1} est dérivable sur $[1\ ;\ 2]$ et déterminer sa fonction dérivée.

c) Montrer que $\forall\quad x\in[1\ ;\ 2]\ \ ;\ \ F^{-1}(x)+F^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

3) Soit $n\in IN^*$, On pose $U_n=\sum_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)$ et $V_n=\dfrac{U_n}{n+1}$

a) Montrer que $\forall\ n\in IN^*\ \ ;\ F^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}+1\right)\le F^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}+1\right)\le F^{-1}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$

b) En déduire que $(V_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculer sa limite.

c) Soit $T_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}F^{-1}\left(\dfrac{2(n+k)}{1+n+k}\right)$. Déduire que $(T_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N° 4 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2+(1-d)(1+i)z+d^2+1=0$ où d est un nombre complexe.

2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $i;-i;d;z_1=i+d\ ;\ z_2=-1-id$. Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe d tel que $OM_1=OM_2$.

3) On suppose que $|d|=3$. Montrer que le point M_1 appartient à un cercle fixe que l'on précisera.

4) On suppose que $\arg(d)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Montrer que le point M_2 appartient à une droite fixe que l'on précisera.

5) On suppose dans cette question que $|d|=1$; $d\neq i$ et $d\neq -i$.

a) Vérifier géométriquement que le triangle AMB est rectangle en M.

b) En déduire que le nombre complexe $\frac{-1-id}{i+d}$ est un réel.

6) Soit l'application $f_d : M(z)\to M'(z')$ tel que : $z'=\left(d-i\sqrt{3}\right)z+1$

a) Déterminer d pour que f_d soit une translation.

b) Déterminer la transformée complexe associe à l'homothétie h de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre O.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\varphi=f_1\circ h$.

Exercice N° 5 : Soit θ un réel appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2(1+i)[\sin\theta-i]z+4\sin\theta=0$

a) Développer $\left[(2-2i)\cos\theta\right]^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On donne les solutions de (E) sous forme cartésienne et on précisera les cas des racines doubles.

b) Exprimer les solutions de (E) à l'aide de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

2) le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points $A;B;M;M_1$ et M_2 d'affixes respectives $z_A=1-i$; $z_B=-2i$; $z=\sqrt{2}e^{i\theta}$; $z_1=(1-i)(1+e^{i\theta})$ et $z_1=(1-i)(1-e^{-i\theta})$

a) Exprimer z_1 à l'aide de z. En déduire que M_1 est l'image de M par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

b) Déterminer alors l'ensemble (C) des points M_1 lorsque θ décrit $]-\pi;\pi]$.

c) Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM_1}\right)$. Placer alors le point M_1 correspondant à $\theta=\frac{\pi}{4}$.

3) On désigne par I le milieu de $[M_1M_2]$.

a) Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ décrit $]-\pi;\pi]$.

b) Montrer que lorsque θ varie dans $]-\pi;\pi]/\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$; la droite (M_1M_2) garde une direction fixe.

c) En déduire que M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à une droite Δ que l'on précisera.

4) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma=\left\{M(z)\in P \text{ tel que : } \arg\left(\frac{z}{z+2i}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[\pi]\right\}$.

5) Mettre $\frac{z_1}{z_1+2i}$ sous forme exponentielle. Retrouver ainsi l'ensemble des points M_1

Devoir de synthèse N° 1 (Exemple 2)

Exercice N° 1 :

Cocher la ou les repose(s) exacte(s) :

1) Soit A et B deux points distincts du plan, alors $h_{(A,-1)} \circ S_B$ est :

a) un déplacement	b) $t_{2\overrightarrow{AB}}$	c) $t_{2\overrightarrow{BA}}$

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -e^{i\frac{\pi}{4}}z$, alors f=

a) $R\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)$	b) $R\left(O,-\frac{3\pi}{4}\right)$	c) $R\left(O,\frac{\pi}{4}\right)$

3) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z}$, alors f est :

a) un déplacement	b) symétrie orthogonale	c) symétrie glissante

Exercice N° 2 : Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne la droite Δ d'équation $y=1$ et M un point de Δ d'affixe z.

1) a) Vérifier que : $M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |z| = |z-2i|$

b) On pose $\left(\overrightarrow{u,OM}\right) \equiv \theta[2\pi]$ avec $0<\theta<\pi$. Montrer que $|z| = \frac{1}{\sin\theta}$ et que $z = \cot g\theta + i$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, et (E) l'équation : $z^n = (z-2i)^n$.

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $M(z) \in \Delta$

b) Montrer que $\left(\frac{z}{z-2i} = e^{i\alpha} \; ; \; \alpha \neq 2k\pi\right) \Leftrightarrow z = \cot g\frac{\alpha}{2} + i$; retrouver 2) a).

c) En déduire que (E) admet exactement n-1 solutions de la forme : $z_k = \cot g\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \; ; \; 1 \leq k \leq n-1$

3) a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-2i)^k z^{n-k} = 0$.

b) En déduire que : $z_1.z_2.....z_{n-1} = \frac{(2i)^{n-1}}{n}$.

c) Montrer alors que : $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).....\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

4) Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*/\{1\}$ par : $U_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).....\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

a) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et majorée.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*/\{1\} \; ; \; U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^n}$ en déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice N° 3 ; Soit ABC un triangle équilatéral direct, I =B*C et D =S_I(A).

On pose: $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$; $g = S_I \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $h = S_{(AD)} \circ R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$

1) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

2)a) Déterminer g (B).

b) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle. Soit G le centre de g. Montrer que les points A, B, G et C appartiennent à un même Cercle C. Construire le point G.

3)a) Caractériser l'application $f \circ g^{-1}$

b) Pour tout point M du plan, on note M_1 =f(M) et M_2 =g(M).Montrer que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe lorsque M décrit le plan P\{C}.

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels on a: M_1M_2 = AD.

4)a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Trouver la forme réduite de h.

5) Soit $\Omega = S_{(AC)}(B)$ et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoie A sur C. On note E =r(B).

a)Déterminer le centre de r et montrer que C =A*E.

b)Soit $N \in [AB] \setminus \{A, B\}$ tel que AN = CN'. Montrer que le triangle $\Omega NN'$ est équilatéral.

Exercice N° 4I- Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ $par : f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x-1} & si \quad x \in]1 ; +\infty[\\ \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}} & si \quad x \in]0 ; 1] \end{cases}$

1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

2) Etudier la continuité da la fonction f sur son domaine de définition.

3) Etudier la dérivabilité da la fonction f en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Soit g la restriction da la fonction f à l'intervalle $]0 ; 1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0 ; 1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$.

5) On donne la suite U définie sur $I = \{n \in IN \ ; \ n \geq 2\}$ $par : U_n = \frac{n!}{2^n}$.

a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} \geq \frac{3}{2} U_n$

b) En déduire que la suite U est croissante et que $U_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times U_2 \quad \forall\ n \in I$

c) Calculer la limite de la suite U lorsque n tend vers $+\infty$.

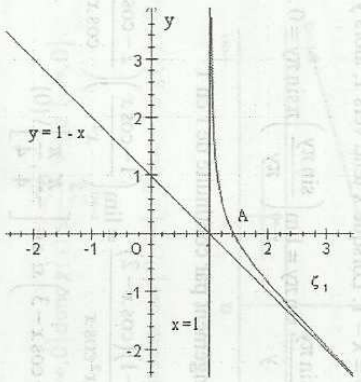
6) a) Montrer que l'équation $g(x) = U_n$ possède une unique solution $\alpha_n \in]0 ; 1] \ \forall n \in I$

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in I}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in I}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N° 5:

Soit f une fonction impaire définie sur $D =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ dont la représentation graphique de la restriction de f sur $]1;+\infty[$, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, est tracée (ζ_f) représentée ci-dessous. Les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1 - x$ sont des asymptotes de la courbe (ζ_f) de f dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.



I) En utilisant le graphique (ζ_f) :

1) Répondre par Vrai ou Faux :

a) f est une bijection de D sur IR

b) La droite $x = -1$ est une asymptote à (ζ_f)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$

2) a) Compléter la construction de (ζ_f) ; b) Dresser alors le tableau de variation de f.

II) On suppose dans la suite que $f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2-1}} + bx$ avec a et b sont des réels et soit $\lambda \in]\sqrt{2};+\infty[$.

1) Montrer que $a = 1$ et $b = -1$.

2) a) déterminer, en fonction de λ, l'Aire A_λ de la région du plan limitée par la courbe (ζ_f) et les droites d'équation $y = 1 - x$; $x = \sqrt{2}$ et $x = \lambda$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} A_\lambda$.